

## Troisième devoir surveillé

Durée 4 h

Les calculatrices sont interdites.

*Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.**Mais leurs résultats pourront être librement utilisés par tous.*Problème 1  
Autour des sommes d'Euler

[CS15]

Dans tout le problème, on note pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On note  $\zeta$  la fonction définie pour  $x > 1$  par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite  $(H_n)$  et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour  $r$  entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$$

à l'aide de valeurs de la fonction  $\zeta$  en des points entiers.**A –****Q 1.** Justifier que la série de terme général

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \text{ converge.}$$

**Q 2.** Montrer qu'il existe une constante réelle  $A$  telle que  $H_n = \ln n + A + o(1)$ . En déduire que  $H_n \sim \ln n$ .**B –** Soit  $r$  un entier naturel.**Q 3.** Pour quelles valeurs de  $r$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$  est-elle convergente?

Dans toute la suite on notera  $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$  lorsque la série converge.

**C –****Q 4.** Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions  $t \mapsto \ln(1-t)$  et  $t \mapsto \frac{1}{1-t}$  ainsi que leur rayon de convergence.**Q 5.** En déduire que la fonction  $t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et préciser son développement en série entière à l'aide des réels  $H_n$ .**D –** Pour tout couple d'entiers naturels  $(p, q)$  et pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt \text{ et } I_{p,q}^\varepsilon = \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q dt.$$

**Q 6.** Montrer que l'intégrale  $I_{p,q}$  existe pour tout couple d'entiers naturels  $(p, q)$ .**Q 7.** Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in ]0, 1[, \\ I_{p,q}^\varepsilon = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1}.$$

**Q 8.** En déduire que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

**Q 9.** En déduire une expression de  $I_{p,q}$  en fonction des entiers  $p$  et  $q$ .**E –** Soit  $r$  un entier naturel non nul et  $f$  une fonction développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . On suppose que pour tout  $x$  dans  $] -1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^r} \text{ converge absolument.}$$

**Q 10.\*** Montrer que

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

**F –****Q 11.** Déduire des questions précédentes que pour tout entier  $r \geq 2$ ,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} \\ = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt.$$

**Q 12.** Établir que l'on a alors

$$S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt.$$

**Q 13.** En déduire que  $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$  puis trouver la valeur de  $S_2$  en fonction de  $\zeta(3)$ .

## Problème 2

[MP22]

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$  sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A. Fonctions  $L$  et  $P$ 

**Q14** ▷ Soit  $z \in D$ . Montrer la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}.$$

Préciser la valeur de sa somme lorsque  $z \in ]-1, 1[$ . On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

**Q15** ▷ Soit  $z \in D$ . Montrer que la fonction  $\Phi : t \mapsto L(tz)$  est dérivable sur un intervalle ouvert incluant  $[-1, 1]$  et donner une expression simple de sa dérivée sur  $[-1, 1]$ .

**Q16** ▷ Soit  $z \in D$ . Montrer que la fonction  $\Psi : t \mapsto (1 - tz)e^{L(tz)}$  est constante sur  $[0, 1]$ , et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}.$$

**Q17** ▷ Montrer que  $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$  pour tout  $z$  dans  $D$ . En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$  est convergente pour tout  $z$  dans  $D$ .

Dans la suite, pour tout  $z \in D$  on note

$$P(z) := \exp \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n) \right].$$

**Q18** ▷ Soit  $z \in D$ . Vérifier que  $P(z) \neq 0$ , que

$$P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - z^n}$$

et que pour tout réel  $t > 0$ ,

$$\ln P(e^{-t}) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

## B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction  $q$  qui à tout réel  $x$  associe le nombre réel  $q(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ , où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

**Q19** ▷ Montrer que  $q$  est continue par morceaux sur  $\mathbf{R}$ , qu'elle est 1-périodique et que la fonction  $|q|$  est paire.

**Q20** ▷ Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1} du$  est bien définie pour tout réel  $t > 0$ .

**Q21** ▷ Montrer que pour tout entier  $n > 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{q(u)}{u} du &= \ln(n!) + (n-1) - n \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) \\ &= \ln \left( \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \right) - 1. \end{aligned}$$

**Q22** ▷ Montrer que  $\int_{[x]}^x \frac{q(u)}{u} du$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et en déduire la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du$ , ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u} du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

**Q23** ▷ À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-u}) du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

**Q24** ▷ Montrer que

$$\int_0^1 \ln \left( \frac{1 - e^{-tu}}{t} \right) du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1.$$

On pourra commencer par établir que  $x \mapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$  est décroissante sur  $\mathbf{R}_+$ .

Pour  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $t \in \mathbf{R}_+$ , on pose

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t q(u)}{e^{tu} - 1} du \quad \text{si } t > 0, \\ \text{et } u_k(t) &= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} du \quad \text{si } t = 0. \end{aligned}$$

**Q25\*** ▷ Montrer que  $u_k$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$  pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ .

**Q26** ▷ Soit  $t \in \mathbf{R}_+^*$ . Montrer successivement que

$$|u_k(t)| = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t |q(u)|}{e^{tu} - 1} du$$

puis  $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$  pour tout entier  $k \geq 1$ , et établir enfin que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour  $t = 0$ .

**Q27** ▷ En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{t q(u)}{e^{tu} - 1} du \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

**Q28** ▷ Montrer, pour tout réel  $t > 0$ , l'identité

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{t q(u)}{e^{tu} - 1} du &= -\frac{1}{2} \ln(1 - e^{-t}) - \ln P(e^{-t}) \\ &\quad - \int_1^{+\infty} \ln(1 - e^{-tu}) du. \end{aligned}$$

**Q29** ▷ Conclure que quand  $t$  tend vers  $0^+$ ,

$$\ln P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1).$$