

## Corrigé du troisième devoir surveillé

## Problème 1

**Q1.** Soit un entier  $n \geq 2$ . Comme la fonction  $t \mapsto 1/t$  décroît sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \leq 0.$$

Or la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right)$  est de même nature que la suite  $\left( \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$  donc elle converge.

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 2} a_n$  converge.

**Q2.** Soit un entier  $n \geq 2$ .

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \left( a_k + \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n a_k + \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &= \ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k + o(1). \end{aligned}$$

Il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $H_n = \ln(n) + A + o(1)$ .

Alors  $\frac{H_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{A + o(1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et

$H_n \sim \ln(n)$ .

**Q3.** Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\frac{H_n}{(n+1)^r} \sim \frac{\ln(n)}{n^r}.$$

Si  $r = 0$ ,  $\sum \ln(n)$  diverge grossièrement, donc aussi  $\sum H_n/(n+1)^0$ .

Si  $r = 1$ ,

$$\frac{\ln(n)}{n} \gg \frac{1}{n}$$

et  $\sum 1/n$  diverge, donc aussi  $\sum H_n/(n+1)^1$ .

Si  $r \geq 2$ ,

$$\frac{\ln(n)}{n^r} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

et  $\sum 1/n^{3/2}$  converge, donc aussi  $\sum H_n/(n+1)^r$ .

$\sum H_n/(n+1)^r$  converge si et seulement si  $r \geq 2$ .

**Q4.** Pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, \quad \ln(1-t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.$$

Ces deux développements en série entière ont pour rayon de convergence 1.

**Q5.** La fonction  $t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$  est développable en série entière comme produit de deux fonctions qui le sont, et son développement en série entière est le produit de Cauchy des deux précédents. De plus, le rayon de convergence du développement est supérieur ou égal au minimum des précédents, c'est-à-dire 1. Pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(1-t)}{1-t} &= \left( \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p} \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} t^q \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot 1 \right) t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n. \end{aligned}$$

En outre, d'après Q3,  $\sum H_n$  diverge donc ce développement en série entière a un rayon de convergence inférieur ou égal à 1.

Ainsi, pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,

$$-\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

Ce développement en série entière a pour rayon de convergence 1.

**Q6.** Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . D'abord,  $t \mapsto t^p \ln^q(t)$  est continue sur  $]0, 1]$ . Quand  $t$  est proche de 0,

$$t^p \ln^q(t) \ll \frac{t^p}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2-p}}$$

où  $t \mapsto 1/t^{1/2-p}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  car  $\frac{1}{2} - p < 1$  donc  $t \mapsto t^p \ln^q(t)$  l'est aussi.

Ainsi,  $I_{p,q}$  existe pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ .

**Q7.** Soient  $p \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Faisons un intégration par parties, licite puisque les fonctions en jeu sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\varepsilon, 1]$ .

$$\begin{aligned} \underline{I_{p,q}^\varepsilon} &= \left[ \frac{t^{p+1}}{p+1} \ln^q(t) \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} q \frac{1}{t} \ln^{q-1}(t) dt \\ &= -\frac{\varepsilon^{p+1} \ln^q(\varepsilon)}{p+1} - \frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon. \end{aligned}$$

**Q8.** En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, sachant que  $p+1 \geq 1$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{p+1} \ln^q(\varepsilon) = 0$ , donc

$$\underline{I_{p,q}} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

**Q9.** Par une récurrence immédiate,

$$\begin{aligned} \underline{I_{p,q}} &= \frac{-q}{p+1} I_{p,q-1} = \frac{(-1)^2 q(q-1)}{(p+1)^2} I_{p,q-2} \\ &= \dots = \frac{(-1)^q q(q-1) \dots 1}{(p+1)^q} I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}. \end{aligned}$$

**Q10.\*** Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

$$\int_0^1 \ln^{r-1}(t) f(t) dt = \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt$$

$$(1) \quad = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 \ln^{r-1}(t) t^n dt$$

$$(2) \quad = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(-1)^{r-1} (r-1)!}{(n+1)^r}.$$

$$= (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}.$$

JUSTIFICATIONS.

(2) D'après Q9, où l'on a reconnu  $I_{n,r-1}$ .

(1) Oui, car

$$\int_0^1 |a_n \ln^{r-1}(t) t^n| dt = (r-1)! \frac{|a_n|}{(n+1)^r}$$

et que d'après l'énoncé, la série

$$\sum \frac{a_n}{(n+1)^r}$$

converge absolument, donc le théorème de permutation série-intégrale s'applique.

**Q11.** Soit  $r \geq 2$ . D'après Q3, la série définissant  $S_r$  converge, absolument puisque son terme général est positif. En utilisant Q10 puis Q5, en remplaçant  $a_n$  par  $H_n$ , on a

$$\begin{aligned} \underline{S_r} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} \\ &= \frac{1}{(-1)^{r-1} (r-1)!} \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n \right) dt \\ &= \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \left( -\frac{\ln(1-t)}{1-t} \right) dt \\ &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 \ln^{r-1}(t) \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt. \end{aligned}$$

**Q12.** À partir de cette intégrale, faisons une intégration par parties que l'on justifiera ensuite :

$$\begin{aligned} \underline{S_r} &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \left( \left[ \ln^{r-1}(t) \left( -\frac{1}{2} \ln^2(1-t) \right) \right]_0^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 (r-1) \frac{\ln^{r-2}(t)}{t} \left( -\frac{1}{2} \ln^2(1-t) \right) dt \right) \\ &= \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{\ln^{r-2}(t) \ln^2(1-t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Cette intégration par parties est licite. En effet, les fonctions  $t \mapsto \ln^{r-2}(t)/t$  et  $t \mapsto -\frac{1}{2} \ln^2(1-t)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$ ; l'intégrale de départ (celle de Q11) converge; le crochet a un sens et vaut 0 puisque d'une part,

$$\ln^{r-1}(t) \ln^2(1-t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln^{r-1}(t) t^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

par croissances comparées, et d'autre part,

$$\ln^{r-1}(t) \ln^2(1-t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} (t-1)^{r-1} \ln^2(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0,$$

toujours par croissances comparées avec  $r-1 \geq 1$ . Alors, le théorème d'intégration par parties permet d'affirmer que la dernière intégrale converge et que l'égalité est valide.

**Q13.** Alors, pour  $r = 2$ ,

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(1-t)}{t} dt.$$

Le changement de variable  $t \mapsto 1-t$  est bijectif et de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0, 1[$  dans lui-même, donc d'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1-t)}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t} dt$$

ont même nature. Puisque la première converge, la seconde aussi et elles sont égales :

$$\underline{S_2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t} dt.$$

En appliquant la question Q10 à la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

et pour  $r = 3$ , on a

$$\begin{aligned} \underline{S_2} &= \frac{1}{2} (-1)^{3-1} (3-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3). \end{aligned}$$

## Problème 2

**Q14.** La série proposée est une série entière. On voit que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \frac{1}{n+1} \bigg/ \frac{1}{n} \right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc d'après la règle d'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière est l'inverse de cette limite, c'est-à-dire 1. Par définition du rayon de convergence, cela signifie que

la série entière proposée converge absolument pour tout  $z \in D$ .

Quand  $z$  est réel, on reconnaît un développement en série entière usuel :

$$\forall z \in ]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).$$

*Commentaire.* Autrement dit, la fonction  $L$  prolonge cette relation sur  $D$ .

**Q15.** Soient  $z \in D$ , fixé, et  $t \in \mathbb{R}$ . Considérons la série entière de la variable  $t$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} t^n,$$

dont la somme sera  $\Phi(t)$  quand elle convergera. Trouvons son rayon de convergence, que l'on notera  $R_z$ .

Supposons  $z \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \frac{z^{n+1}}{n+1} \middle/ \frac{z^n}{n} \right| = \frac{n}{n+1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|.$$

Toujours d'après la règle de d'Alembert,

$$R_z = \frac{1}{|z|}.$$

Si  $z = 0$ , c'est la série nulle et  $R_0 = +\infty$ . Avec la convention usuelle concernant les rayons de convergence, disons encore ici que

$$R_0 = \frac{1}{0}.$$

Comme somme de série entière,  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-R_z, R_z[$ , donc en particulier, elle y est  $\mathcal{C}^1$ . De plus  $|z| < 1$ , donc  $1 < R_z$  et  $[-1, 1] \subset ]-R_z, R_z[$ .

Ainsi,  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $]-R_z, R_z[$ , lequel contient  $[-1, 1]$ .

Comme on peut dériver une série entière terme à terme, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$\Phi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = \frac{z}{1-zt},$$

où l'on a reconnu la somme d'une série géométrique.

**Q16.** Soit  $z \in D$ , fixé. Pour montrer que  $\Psi$  est constante sur  $[0, 1]$ , montrons qu'elle y est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que sa dérivée est nulle.

Commençons par montrer que  $f : t \mapsto e^{\Phi(t)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . Soit  $t \in [0, 1]$ . En notant  $u(t) = \operatorname{Re}(\Phi(t))$  et  $v(t) = \operatorname{Im}(\Phi(t))$ ,

$$f(t) = e^{\Phi(t)} = e^{u(t)+iv(t)} = e^{u(t)} e^{iv(t)}.$$

La fonction  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , on vient de le voir. Donc ses parties réelles et imaginaires le sont aussi. La fonction  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Par ailleurs, la fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{d}{d\theta}(e^{i\theta}) = -\sin \theta + i \cos \theta = i e^{i\theta},$$

comme on s'en doutait. Alors, par composition et produit,  $f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . De plus, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t) e^{u(t)} e^{iv(t)} + i v'(t) e^{u(t)} e^{iv(t)} \\ &= (u'(t) + i v'(t)) e^{u(t)+iv(t)} \\ &= \Phi'(t) e^{\Phi(t)}. \end{aligned}$$

*Commentaire.* Le résultat paraît tout à fait raisonnable. Mais les acrobaties pour l'obtenir sont nécessaires. Sinon, on serait en train de dériver  $z \mapsto e^z$  par rapport à la variable complexe  $z$ , ce qui est possible mais n'est pas au programme.

Pour finir,  $t \mapsto 1-zt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , car c'est un polynôme de degré 1. Ainsi,  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  comme on le souhaitait. De plus, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= -z e^{\Phi(t)} + (1-zt) \Phi'(t) e^{\Phi(t)} \\ &= -z e^{\Phi(t)} + (1-zt) \frac{z}{1-zt} e^{\Phi(t)} = 0, \end{aligned}$$

ce que l'on voulait. Ainsi,  $\Psi$  est constante sur  $[0, 1]$ .

Par ailleurs,  $\Psi(0) = e^{\Phi(0)} = e^{L(0)} = e^0 = 1$ . Donc  $\Psi(1) = 1$ . Mais  $\Psi(1) = (1-z) e^{L(z)}$ , donc

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

**Q17.** Soit  $z \in D$ . On a

$$\begin{aligned} |L(z)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{n} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = \underline{-\ln(1-|z|)}. \end{aligned}$$

Pour tout entier  $n$  non nul,

$$|L(z^n)| \leq -\ln(1-|z|^n).$$

Et pour  $n$  grand,

$$-\ln(1-|z|^n) \sim |z|^n.$$

Comme  $|z| < 1$ , la série géométrique  $\sum |z|^n$  converge. Par équivalence, puis majoration, on en déduit que

$\sum L(z^n)$  converge absolument.

**Q18.** Soit  $z \in D$ . Puisque l'exponentielle n'est jamais nulle,  $P(z) \neq 0$ .

Par définition, la somme d'une série convergente est la limite de ses sommes partielles. Notons

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n),$$

et pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_N = \sum_{n=1}^N L(z^n).$$

Comme plus haut, introduisons les parties réelles et imaginaires :

$$S = U + iV \text{ et } S_N = U_N + iV_N.$$

On a donc

$$S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N, \quad U = \lim_{N \rightarrow +\infty} U_N, \quad V = \lim_{N \rightarrow +\infty} V_N.$$

À l'aide des fonctions déjà rencontrées à la question 16, lesquelles sont de classe  $\mathcal{C}^1$  donc continues sur  $\mathbb{R}$ , par composition des limites, on peut donc affirmer que

$$\begin{aligned} e^{S_N} &= e^{U_N} e^{iV_N} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^U e^{iV} = e^{U+iV} = e^S = P(z). \end{aligned}$$

De plus, toujours avec la question 16,

$$\begin{aligned} e^{S_N} &= \exp\left(\sum_{n=1}^N L(z^n)\right) \\ &= \prod_{n=1}^N \exp(L(z^n)) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-z^n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-z^n}.$$

Soit un réel  $t > 0$ . Appliquons ce qui précède à  $z = e^{-t}$  : comme  $t > 0$ ,  $z \in ]0, 1[ \subset D$ , et l'on peut affirmer que

$$P(e^{-t}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-e^{-nt}}.$$

En outre, tous les termes du produit sont strictement positifs, donc à la limite,  $P(e^{-t}) \geq 0$ . Mais d'après le

début de la question, il est non nul donc  $P(e^{-t}) > 0$ . Alors, on peut appliquer le logarithme : pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln P(e^{-t}) = \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-e^{-nt}}\right).$$

Par ailleurs,  $\sum \ln(1-e^{-nt})$  converge comme on l'a vu à la question 17, donc

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} -\sum_{n=1}^N \ln(1-e^{-nt}).$$

Mais

$$-\sum_{n=1}^N \ln(1-e^{-nt}) = \ln\left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{1-e^{-nt}}\right).$$

Ainsi, par composition des limites et continuité du logarithme,

$$\begin{aligned} \boxed{\ln P(e^{-t})} &= \ln\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1-e^{-nt}}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{1-e^{-nt}}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt}). \end{aligned}$$

**Q19-29.** J'ai perdu la fin, et je n'ai pas eu le courage de la retaper...