Quatrième devoir surveillé

Durée 4 h

Les calculatrices sont interdites

PROBLÈME 1

[CCINP24]

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j)\, t^j.$$

Partie I – Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.

Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\, p.$$

Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».

Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbf{P}(A)$. Interpréter.

Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes de même loi.

On note $D_n = T_1 + \cdots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.

Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n\,(1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II – Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(a\,(x-1)). \end{cases}$$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in \,]0,1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n).$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \,]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

Q8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Q9. Soit la fonction

$$\psi : \begin{cases}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - a\,(x-1). \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \iff f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$.

En déduire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in \,]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.

En distinguant les cas $z_1 \in [0,\alpha[$ et $z_1 \in \,]\alpha,1[$, montrer que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

II.2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi. Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$?

Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, n]\!]$?

Q14. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\mathbf{P}(V_1 = k \,|\, S = n).$$

En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Q15. On note $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\mathbf{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Q16. Justifier que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbf{P}(V_{n+1} = 0 \,|\, V_1 = j) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j.$$

On distinguera le cas $j = 0$.

Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1)).$$

Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.

EXERCICE

[CCINP24]

Équivalent de Stirling

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Q20. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Q21. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\sqrt{\pi}.$$

Q22. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\rho_k = \ln k - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln \Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t \, dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k.$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

Q23. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t))\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Q24. En déduire que $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Q25. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + \mathrm{o}(1).$$

En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\Gamma(n) \sim e^c\, n^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-n}.$$

Q26. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $[0, n[$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, \mathrm{d}u.$$

Q27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0,\ \Gamma_n(x) = \frac{n^x\, n!}{x\,(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Q28.* On définit la fonction $\mathbf{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant

$$\mathbf{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in\,]0,n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En remarquant que

$$\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\, t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t,$$

utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x).$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x\,(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Q29. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\, n^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question **Q25**.

*On pourra faire appel aux résultats des questions **Q19** et **Q20**.*

PROBLÈME 2
[CCINP22]

Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 :

$$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{série n}^\circ 1} \cap \underbrace{F_3}_{\text{série n}^\circ 2} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{série n}^\circ 3} \cap F_8 \cap \cdots$$

Exemple 2 :

$$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{série n}^\circ 1} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{série n}^\circ 2} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{série n}^\circ 3}.$$

Partie I – Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

— si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si n'on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;

— sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q30. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k\geqslant 0} x^k.$$

Q31. En déduire que pour tout $x \in\,]-1, 1[$, la série $\sum_{k\geqslant 0} k\, x^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} k\, x^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q32. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

Q33. Montrer que $\mathbf{P}(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q34. En déduire la valeur de $\mathbf{P}(L_1 = 0)$.

Q35. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans ce problème ?

Partie II – Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1,\ N_3 = 2,$$
$$N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \text{ et } N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin du problème, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q36. Déterminer les lois de N_1 et N_2.

Q37. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

Q38. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$\mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$\mathbf{P}((N_{n+1}=k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n=k) \cap F_n),$$
$$\mathbf{P}((N_{n+1}=k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n=k-1) \cap P_n),$$
$$\mathbf{P}((N_{n+1}=k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n=k-1) \cap F_n).$$

Q39. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$\mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(N_m = k)x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = x.$$

Q40. Déduire de **Q39** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x).$$

Q41. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q42. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.

Q43. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.