Sixième devoir surveillé

D'après [E3A12]
Durée 3 h
L'usage de calculatrices est interdit.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes sur des espaces vectoriels réels construits à l'aide de formes linéaires.

On rappelle qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel et tout entier $p \geqslant 1$, on note f^p l'endomorphisme composé $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

Les deux premières parties sont consacrées à deux exemples et la suivante à une étude théorique de tels endomorphismes. Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles.

Première partie

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. À tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, on associe le vecteur colonne

$$X_M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi que l'ensemble

$$S = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid X_M^\top A X_M = 0\}.$$

On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

1. Vérifier que $M \in S$ si et seulement si

$$(2x - 2y - z)(x + 2y - 2z) = 0$$

et en déduire que S est la réunion de deux plans.

2. On se propose dans cette question de retrouver la nature de S par une autre approche. On considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \tfrac{1}{3}(1, 2, -2),\ \vec{e}_2 = \tfrac{1}{3}(2, 1, 2),\ \vec{e}_3 = \tfrac{1}{3}(2, -2, -1).$$

(a) Vérifier que $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis calculer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$.

(b) En déduire que A est semblable à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et justifier qu'il existe une matrice inversible P, que l'on précisera, telle que $U = P^\top A P$.

(c) Soit un point M de $\mathbb{R}^3$. On note X'_M le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

(i) Écrire X_M en fonction de P et X'_M.

(ii) En déduire que $M \in S$ si et seulement si ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{C}$ vérifient $x'z' = 0$ et retrouver la nature géométrique de S.

3. (a) Déterminer le rang de f et calculer $f \circ f$.

(b) Déterminer une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ f(\vec{v}) = \phi(\vec{v})\,\vec{c}.$$

Deuxième partie

On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes

$$u_0 = -1,\ v_0 = 2,\ w_0 = -1$$

et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \ \ \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n). \end{cases}$$

1. (a) Exprimer $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$ et en déduire que $v_n = -2w_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

(b) En déduire que $u_n = -3w_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

(c) En déduire, pour $n \geqslant 1$, les expressions de w_n, u_n et v_n en fonction de n uniquement puis prouver la convergence de ces trois suites.

2. On se propose dans cette question de retrouver les limites de ces suites par une autre approche.

(a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = M X_n.$$

On notera encore f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.

(b) Déterminer une base du noyau et de l'image de f. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

(c) Déterminer la matrice de f dans une base adaptée à cette somme directe.

(d) En déduire l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}\,M\,P$ et préciser D et P.

(e) Retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) en posant $Y_n = P^{-1}\,X_n$.

Troisième partie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$; on fixe un vecteur $\vec{a}$ non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E qui n'est pas la forme linéaire nulle. On considère enfin l'application f définie sur E par

$$\forall \vec{x} \in E,\ f(\vec{x}\,) = u(\vec{x}\,)\,\vec{a}.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et préciser son rang.

2. Les quatre questions suivantes portent sur les éléments propres.

(a)* Vérifier que 0 est une valeur propre de f et exprimer son sous-espace propre associé à l'aide de $\operatorname{Ker} u$.

(b)* On suppose que λ est une valeur propre non nulle de f et que $\vec{x}$ est un vecteur propre associé. Montrer que $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{a}$ et que $\lambda = u(\vec{a}\,)$.

(c)* En déduire, en distinguant les cas $u(\vec{a}\,) = 0$ et $u(\vec{a}\,) \neq 0$, toutes les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

(d)* Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur $u(\vec{a}\,)$ pour que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

3. On adopte un autre point de vue pour établir cette somme directe.

(a) Pour tout $\vec{x} \in E$ et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer que

$$f^p(\vec{x}\,) = u(\vec{x}\,)\,(u(\vec{a}\,))^{p-1}\,\vec{a}.$$

(b) On suppose que $u(\vec{a}\,) = 0$. Vérifier que $f^2 = O$ (endomorphisme nul) et en déduire que la somme $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ n'est pas directe.

(c) On suppose que $u(\vec{a}\,) \neq 0$. Trouver un polynôme annulateur de f de degré 2 et en déduire que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

On considère à présent un endomorphisme g de E de rang 1.

4. Démontrer qu'il existe un vecteur non nul $\vec{b}$ et une forme linéaire v sur E, qui n'est pas la forme linéaire nulle, tels que

$$\forall \vec{x} \in E,\ g(\vec{x}\,) = v(\vec{x}\,)\,\vec{b}.$$

5. On suppose que $g^2 \neq O$ (endomorphisme nul). Montrer qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que $g^2 = 0$ et on considère un vecteur $\vec{e}_n$ tel que $g(\vec{e}_n) \neq 0$.

(a) Énoncer le théorème de la base incomplète.

(b) Justifier l'existence de vecteurs $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ tels que $(g(\vec{e}_n), \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$.

(c) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Déduire des questions **5** et **6** que deux matrices carrées de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace.