Corrigé du sixième devoir surveillé

I.1.a. Avec des notations évidentes pour le produit scalaire euclidien usuel et la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^3$, on calcule aisément

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0,$$
$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1.$$

Donc la famille $\mathcal{C}$ est orthonormée ; elle est donc libre. Comme elle contient 3 vecteurs,

$\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Commentaire. Bien-sûr, on aurait pu montrer directement que $\mathcal{C}$ est libre ; on aurait aussi pu considérer la matrice de $\mathcal{C}$ dans la base canonique, et vérifier qu'elle est inversible, par exemple avec son déterminant.

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En maniant les matrices associées dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f(\vec{e}_1)) &= \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1)\\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1\\ 4 & -4 & -2\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1\\ 2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1\\ -2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Cela signifie que $f(\vec{e}_1) = \vec{0}$. De même,

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1\\ 4 & -4 & -2\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

et $f(\vec{e}_2) = \vec{0}$. Enfin,

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1\\ 4 & -4 & -2\\ -4 & 4 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

et $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$.

I.1.b. Alors, par définition,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = U.$$

D'après le théorème de changement de base des endomorphismes,

Cela entraine que A et U sont semblables.

Mieux, $A = P\,U\,P^{-1}$ où

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&2&-1\end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$.

I.1.c. D'après le théorème du changement de base pour les vecteurs, $X = P\,X'$.

I.1.d. Comme U est triangulaire, A est trigonalisable. En outre, ses valeurs propres sont celles de U, qui sont les termes diagonaux de U. Ainsi, $\operatorname{Sp} A = \{0\}$. Alors, A est diagonalisable si et seulement si le polynôme

$$\prod_{\lambda\in\operatorname{Sp} A}(X-\lambda) = X$$

est annulateur de A. Or $A \neq 0$, donc X n'est pas annulateur de A, et A n'est pas diagonalisable.

I.2.a. On a $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(U) = 1$.

De plus, $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f\circ f) = U^2 = 0$. Donc $f\circ f = 0$.

I.2.b. Soit $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En reprenant les calculs de la question I.1.a,

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f(\vec{v})) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\vec{e}_3\cdot\vec{v}\\ 2\,\vec{e}_3\cdot\vec{v}\\ -2\,\vec{e}_3\cdot\vec{v}\end{pmatrix} = (\vec{e}_3\cdot\vec{v})\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},$$

ce qui signifie que $f(\vec{v}) = (\vec{e}_3\cdot\vec{v})\,\vec{e}_1$.

C'est la forme attendue, avec $\vec{c} = \vec{e}_1$ et $\phi(\vec{v}) = \vec{e}_3\cdot\vec{v}$.

II.1.a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}v_{n+1} + 2\,w_{n+1} &= -\tfrac{1}{2}\,(u_n + w_n) + 2\,\tfrac{1}{4}\,(u_n - v_n - w_n)\\ &= -\tfrac{1}{2}\,v_n - w_n = -\tfrac{1}{2}\,(v_n + 2\,w_n).\end{aligned}$$

La suite $(v_n + 2\,w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 + 2\,w_0 = 0$, d'où $v_n + 2\,w_n = 0$, c'est-à-dire

$v_n = -2\,w_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

II.1.b. Sur le même principe, pour $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&u_{n+1} + 3\,w_{n+1}\\ &= -\tfrac{1}{4}\,(3\,u_n - v_n + w_n) + 3\,\tfrac{1}{4}\,(u_n - v_n - w_n)\\ &= -\tfrac{1}{2}\,v_n - w_n = 0.\end{aligned}$$

Cela signifie que $u_n = -3\,w_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

II.1.c. Alors, pour $n \geqslant 1$,

$$w_{n+1} = \tfrac{1}{4}\,(-3\,w_n + 2\,w_n - w_n) = -\tfrac{1}{2}\,w_n.$$

Donc,

$$w_n = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}\,w_1 = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}\,(-\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})^n.$$

Alors, $u_n = -3\,(-\frac{1}{2})^n$ et $v_n = -2\,(-\frac{1}{2})^n$.

Il s'ensuit que les trois suites tendent vers 0.

II.2.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans difficulté, $X_{n+1} = M\,X_n$ avec

$$M = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

II.2.b. En nommant C_1, C_2, C_3 les colonnes de M, on voit que

$$C_1 + C_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $-\frac{1}{2}$ est valeur propre évidente de M, et

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in E_{-1/2}(M).$$

De même,

$$C_1 - C_3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Avec la même interprétation, $-\frac{1}{2}$ est une seconde fois valeur propre de M et

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in E_{-1/2}(M).$$

Alors, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, donc la trace de M est la somme de ses valeurs propres : la dernière valeur propre est donc $\operatorname{Tr} M - 2(-\frac{1}{2}) = 0$. Et l'on « voit » (cette opération est plus acrobatique :-) que

$$C_1 + 2C_1 - C_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \in E_0(M).$$

On en conclut que

$$E_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_{-1/2}(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Finalement, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et pour chaque valeur propre λ, $m(\lambda) = \dim E_\lambda(M)$.

Donc M est diagonalisable et $M = PDP^{-1}$, avec $D = \operatorname{diag}(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

II.2.c. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $Y_n = P^{-1}X_n$, ou aussi $X_n = PY_n$,

$$\begin{aligned}Y_{n+1} &= P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}MX_n\\ &= P^{-1}MPY_n = DY_n,\end{aligned}$$

d'où $Y_n = D^n Y_0$. En posant $Y_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & (-\frac{1}{2})^n & 0\\0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc les suites (x_n), (y_n) et (z_n) tendent vers 0. Et comme les suites (u_n), (v_n) et (w_n) en sont combinaisons linéaires, elles aussi tendent vers 0.

III.1. Étant donnés $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E et λ dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(\vec{x} + \lambda\vec{y}) &= u(\vec{x} + \lambda\vec{y})\,\vec{a}\\ &= (u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{y}))\,\vec{a}\\ &= u(\vec{x})\,\vec{a} + \lambda u(\vec{y})\,\vec{a}\\ &= f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y}),\end{aligned}$$

ce qui signifie que f est linéaire. Et comme elle va clairement de E dans lui-même,

f est un endomorphisme de E.

De plus, $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}\vec{a}$ donc $\operatorname{rg}(f) \leqslant 1$. Mais comme u n'est pas la forme linéaire nulle, il existe $\vec{x} \in E$ tel que $u(\vec{x}) \neq 0$, et puisque $\vec{a} \neq \vec{0}$, $f(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Donc f n'est pas l'endomorphisme nul, et $\operatorname{rg}(f) \geqslant 1$.

Ainsi, $\operatorname{rg}(f) = 1$.

III.2.a. Cela entraine avec le théorème du rang que $\dim\operatorname{Ker} f = n - 1 \geqslant 1$, puisque $n \geqslant 2$. Alors f n'est pas injective, ce qui équivaut à dire que

0 est valeur propre de f.

On voit que pour tout $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$, $u(\vec{x}) = 0$ donc $f(\vec{x}) = \vec{0}$ et $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} f$. Mais $\dim\operatorname{Ker} u = n - 1$, car $\operatorname{Ker} u$ est un hyperplan, qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} u$.

III.2.b. Soit λ une valeur propre non nulle de f et $\vec{x}$ un vecteur propre associé. Alors $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} = u(\vec{x})\,\vec{a}$ et $\vec{x} = \frac{u(\vec{x})}{\lambda}\,\vec{a} \in \mathbb{R}\vec{a}$: $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{a}$.

Cela signifie que $E_\lambda(f) \subset \mathbb{R}\vec{a}$. Or $\dim E_\lambda(f) \geqslant 1$, donc $E_\lambda(f) = \mathbb{R}\,\vec{a}$. En outre, $f(\vec{a}) = u(\vec{a})\,\vec{a}$. Or $\vec{a} \neq \vec{0}$, donc $\vec{a}$ est vecteur propre de f, associé à $u(\vec{a})$. Par unicité de la valeur propre associée à un vecteur propre, on en tire que $\lambda = u(\vec{a})$.

En passant, puisque l'on a supposé $\lambda \neq 0$, cela entraine que $u(\vec{a}) \neq 0$, autrement dit que $\vec{a} \notin \operatorname{Ker} u$.

III.2.c. Résumons.

Si $u(\vec{a}) = 0$, f n'admet que 0 comme valeur propre, laquelle est donc de multiplicité n. Et $E_0(f) = \operatorname{Ker} u$.

Si $u(\vec{a}) \neq 0$, c'est une valeur propre de f ; de plus, $E_0(f) = \operatorname{Ker} u$ et $E_{u(\vec{a})} = \mathbb{R}\vec{a}$.

III.2.d. Dans le premier cas, $E_0(f) \subsetneq E$ et f n'est pas diagonalisable.

Dans le second cas, comme $\vec{a} \notin \operatorname{Ker} u$ et que $\operatorname{Ker} u$ est un hyperplan de E,

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \mathbb{R}\vec{a} = E_0(f) \oplus E_{u(\vec{a})}(f),$$

et f est diagonalisable.

Ainsi, f est diagonalisable si et seulement si $u(\vec{a}) \neq 0$.

III.3.a. Soient $\vec{x} \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f^p(\vec{x}) = f^{p-1}(f(\vec{x})) = f^{p-1}(u(\vec{x})\,\vec{a}) = u(\vec{x})\,f^{p-1}(\vec{a}).$$

Or $f(\vec{a}) = u(\vec{a})\,\vec{a}$ et l'on sait qu'alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(f)(\vec{a}) = P(u(\vec{a}))\,\vec{a}$. En particulier, pour $P = X^{p-1}$, $f^{p-1}(\vec{a}) = (u(\vec{a}))^{p-1}\,\vec{a}$. Ainsi,

$$f^p(\vec{x}) = u(\vec{x})\,(u(\vec{a}))^{p-1}\,\vec{a}.$$

III.3.b. Voici deux telles caractérisations.

C1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

C2. Un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)}(X - \lambda)$ est annulateur de f.

III.3.c. Supposons que $u(\vec{a}\,) = 0$. En vertu de la question III.3.a, pour tout $\vec{x} \in E$,

$$f^2(\vec{x}) = u(\vec{x})\,u(\vec{a})\,\vec{a} = \vec{0},$$

autrement dit, $f^2 = O$.

Cela signifie que le polynôme X^2 est annulateur de f. Donc les valeurs propres de f sont parmi ses racines : f n'admet donc que 0 comme valeur propre. Alors le polynôme P de la caractérisation **C2** précédente est $P = X$. Mais $P(f) = f \neq O$, puisque $\operatorname{rg}(f) = 1$ (*cf* III.1). Alors, d'après **C2**,

f n'est pas diagonalisable.

III.3.d. Supposons que $u(\vec{a}) \neq 0$. Toujours d'après la question III.3.a, pour tout $\vec{x} \in E$,

$$f^2(\vec{x}) = u(\vec{x})\,u(\vec{a})\,\vec{a} = u(\vec{a})\,f(\vec{x}),$$

autrement dit, $f^2 - u(\vec{a})\,f = O$, ce qui signifie que

le polynôme $X^2 - u(\vec{a})\,X$ est annulateur de f.

Ledit polynôme se factorise en $X\,(X - u(\vec{a}))$: il est donc scindé à racines simples. Grâce à la caractérisation **C1**,

f est diagonalisable.

III.4. Comme $\operatorname{rg}(g) = 1$, grâce au théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} g = n - 1$. Donc $\operatorname{Ker} g$ est un hyperplan : il existe alors une forme linéaire non nulle v telle que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} v$. Comme v est une forme linéaire non nulle, elle est surjective : il existe donc un vecteur $\vec{c} \in E$ tel que $v(\vec{c}) = 1$. Alors $\vec{c} \notin \operatorname{Ker} v$, et l'on peut affirmer que $E = \operatorname{Ker} v \oplus \mathbb{R}\vec{c}$.

Soit $\vec{x} \in E$: il s'écrit de façon unique $\vec{x} = \vec{y} + \lambda\vec{c}$, où $\vec{y} \in \operatorname{Ker} v$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, $v(\vec{x}) = v(\vec{y}) + \lambda v(\vec{c}) = \lambda$ et $\vec{x} = \vec{y} + v(\vec{x}\,)\,\vec{c}$. Alors, $g(\vec{x}\,) = g(\vec{y}\,) + \lambda\,g(\vec{c})$. Comme $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} v$, $g(\vec{y}) = \vec{0}$. Et comme $\vec{c} \notin \operatorname{Ker} v$, $\vec{c} \notin \operatorname{Ker} g$ et $g(\vec{c}) \neq \vec{0}$. En posant $\vec{b} = g(\vec{c})$, on a donc $g(\vec{x}) = \lambda\,g(\vec{c}) = v(\vec{x})\,\vec{b}$.

Finalement, il existe un vecteur non nul $\vec{b}$ et une forme linéaire non nulle v tels que pour tout $\vec{x} \in E$, $g(\vec{x}\,) = v(\vec{x})\,\vec{b}$.

III.5. En utilisant les calculs de la question III.3 avec $f = g$ et $\vec{a} = \vec{b}$, pour tout $\vec{x} \in E$,

$$g^2(\vec{x}) = v(\vec{x})\,v(\vec{b})\,\vec{b} = v(\vec{b})\,g(\vec{x}).$$

Si $v(\vec{b}) = 0$, pour tout $\vec{x}$, $g^2(\vec{x}) = \vec{0}$ et $g^2 = O$. Comme on a supposé que ce n'est pas le cas, par contraposition, $v(\vec{b}) \neq 0$. Alors on est dans le cas de la question III.3.d, qui permet d'affirmer que

g est diagonalisable.

De plus, $E = E_0(g) \oplus E_{v(\vec{b})}(g)$ d'après la question III.2.d.

Dans une base de vecteurs propres de g adaptée à cette somme directe, la matrice de g est la matrice diagonale $\operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \alpha)$, avec $\alpha = v(\vec{b}) \neq 0$.

III.6.a. Un tel vecteur $\vec{e}_n$ existe, car $g \neq O$.

Le théorème de la base incomplète stipule que dans un espace vectoriel de dimension finie, l'on peut compléter toute famille libre en une base. On peut même se contraindre à choisir les vecteurs dans une famille génératrice donnée.

III.6.b. Par hypothèse, $g(\vec{e}_n) \neq \vec{0}$, mais $g^2(\vec{e}_n) = \vec{0}$ car $g^2 = O$. Alors $g(\vec{e}_n)$ est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} g$: c'est une famille libre de $\operatorname{Ker} g$. Grâce à théorème précédent et sachant que $\dim \operatorname{Ker} g = n - 1$,

on peut compléter la famille libre $(g(\vec{e}_n))$ en une base $(g(\vec{e}_n), \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} g$.

III.6.c. Comme $g(\vec{e}_n) \neq \vec{0}$, $\vec{e}_n \notin \operatorname{Ker} g$. Or $\operatorname{Ker} g$ est un hyperplan de E, donc $E = \operatorname{Ker} g \oplus \mathbb{R}\vec{e}_n$.

Alors, la famille $\mathcal{B} = (g(\vec{e}_n), \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à cette somme directe, dans laquelle la matrice de g a exactement la forme de l'énoncé.

III.7. Soient deux matrices A et B de rang 1.

Si elles sont semblables, elles ont bien-sûr même trace.

Supposons qu'elles aient même trace.

Si $A^2 = 0$, forcément $B^2 = 0$. Alors, d'après la question III.6, A et B sont semblables à la même matrice, donnée par l'énoncé. Donc elles sont semblables.

Si $A^2 \neq 0$, forcément $B^2 \neq 0$. D'après la question III.5, A est semblable à une matrice $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \alpha)$ et B l'est à une matrice $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \beta)$. Or $\mathrm{Tr}(A) = \alpha$ et $\mathrm{Tr}(B) = \beta$, et $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. Donc A et B sont semblables à la même matrice diagonale : elles sont donc semblables.

Deux matrices de rang 1 sont donc semblables si et seulement si elles ont même trace.

IV.1. Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, h$: $h(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $\vec{x} = \frac{u(\vec{x})}{u(\vec{a})}\,\vec{a}$ (par hypothèse, $u(\vec{a}) \neq 0$) et $\vec{x} \in \mathbb{R}\vec{a}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, h \subset \mathbb{R}\vec{a}$. Et bien-sûr, $h(\vec{a}) = \vec{0}$ donc $\mathbb{R}\vec{a} \subset \mathrm{Ker}\, h$.

Alors $\mathrm{Ker}\, h = \mathbb{R}\vec{a}$.

Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, u$: $u(\vec{x}) = 0$ donc $h(\vec{x}) = u(\vec{a})\,\vec{x}$ et

$$\vec{x} = \frac{1}{u(\vec{a})}\, h(\vec{x}) = h\Big(\frac{1}{u(\vec{a})}\,\vec{x}\Big) \in \mathrm{Im}\, h,$$

d'où $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Im}\, h$. Or $\dim \mathrm{Ker}\, h = 1$, donc $\mathrm{Im}\, h$ est un hyperplan. Et comme $\mathrm{Ker}\, u$ en est aussi un,

$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, h$.

IV.2. Comme $\mathrm{Ker}\, h = \mathbb{R}\vec{a} \neq \{\vec{0}\}$,

$0 \in \mathrm{Sp}(h)$ et $E_0(h) = \mathrm{Ker}\, h = \mathbb{R}\vec{a}$.

Et l'on a vu que pour tout $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, u$, $h(\vec{x}) = u(\vec{a})\vec{x}$. Comme $\mathrm{Ker}\, u \neq \{\vec{0}\}$,

$u(\vec{a}) \in \mathrm{Sp}(h)$ et $E_{u(\vec{a})}(h) = \mathrm{Ker}\, u$.

Comme $u(\vec{a}) \neq 0$, $\vec{a} \notin \mathrm{Ker}\, u$. Et comme $\mathrm{Ker}\, u$ est un hyperplan, $E = \mathbb{R}\,\vec{a} \oplus \mathrm{Ker}\, u = E_0(h) \oplus E_{u(\vec{a})}(h)$. Cela signifie que h n'a pas d'autre valeur propre, ni donc d'autre espace propre.

Et si l'on suppose E de dimension finie, cela signifie que h est diagonalisable.

IV.3. Procédons par récurrence sur p.

Pour $p = 1$, c'est évident et l'initialisation est acquise.

Supposons le résultat vrai pour $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\vec{x} \in E$.

$$\begin{aligned} h^{p+1}(\vec{x}) &= h(h^p(\vec{x})) = h\big((u(\vec{a}))^{p-1}\, h(x)\big) \\ &= (u(\vec{a}))^{p-1}\, h(h(x)). \end{aligned}$$

Comme $h(\vec{x}) \in \mathrm{Im}\, h$ et que $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Ker}\, u = E_{u(\vec{a})}(h)$,

$$h(h(\vec{x})) = u(\vec{a})\, h(\vec{x}).$$

Donc $h^{p+1}(\vec{x}) = (u(\vec{a}))^p\, h(x)$, ce qui clôt l'hérédité.

Par le principe de récurrence,

$\forall \vec{x} \in E, \forall p \in \mathbb{N}^*,\ h^p(\vec{x}) = (u(\vec{a}))^{p-1}\, h(x).$

IV.4. À l'évidence, l'énoncé veut parler de la forme linéaire u, et non h. Construisons donc l'endomorphisme h. Pour $\vec{x} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} h(\vec{x}) &= u(\vec{a})\,\vec{x} - u(\vec{x})\,\vec{a} \\ &= -\tfrac{1}{2}\,(u, v, w) - (u - v + w)\,(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}) \\ &= (-\tfrac{3}{4}\,u + \tfrac{1}{4}\,v - \tfrac{1}{4}\,w, -\tfrac{1}{2}\,u - \tfrac{1}{2}\,w, \tfrac{1}{4}\,u - \tfrac{1}{4}\,v - \tfrac{1}{4}\,w) \\ &= \big(-\tfrac{1}{4}\,(3\,u - v + w), -\tfrac{1}{2}\,(u + w), \tfrac{1}{4}\,(u - v - w)\big). \end{aligned}$$

Alors, en revenant aux suites de la partie II et en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_n = (u_n, v_n, w_n)$, on voit que les relations de récurrence se traduisent par

$$\vec{x}_{n+1} = h(\vec{x}_n).$$

Donc par une récurrence évidente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\vec{x}_n = h^n(\vec{x}_0).$$

Et d'après la question IV.3,

$$\begin{aligned} h^n(\vec{x}_0) &= (u(\vec{a}))^{n-1}\, h(\vec{x}_0) = (-\tfrac{1}{2})^{n-1}\, \vec{x}_1 \\ &= (-\tfrac{1}{2})^{n-1}\, (\tfrac{3}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Où l'on retrouve les expressions de la question II.1.c, et donc aussi ses conclusions.