

# Corrigé du septième devoir surveillé

1. Soient  $\mathbb{A} = (a_{ij})$  et  $\mathbb{B} = (b_{ij})$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n$ . Posons  $\mathbb{A}\mathbb{B} = (c_{ij})$  et  $\mathbb{B}\mathbb{A} = (d_{ij})$ . On a

$$\begin{aligned} \underline{\text{tr } \mathbb{A}\mathbb{B}} &= \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \underline{\text{tr } \mathbb{B}\mathbb{A}}. \end{aligned}$$

2. Considérons deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . En notant  $\mathbb{P} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ , on a

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \mathbb{P}\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\mathbb{P}^{-1}.$$

Alors, grâce à la question précédente,

$$\text{tr } \mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \text{tr}(\mathbb{P}(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\mathbb{P}^{-1})) = \text{tr}((\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\mathbb{P}^{-1})\mathbb{P}) = \text{tr } \mathbb{T}_{\mathcal{C}}.$$

Cela signifie que la trace  $\text{tr } \mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$ .

3. Notons  $r = \text{rg } P = \dim R(P)$ . D'après le théorème du rang, on sait que

$$\dim X = r + \dim N(P).$$

En outre, pour tout  $x \in R(P) \cap N(P)$ , d'une part  $Px = 0$  et d'autre part, il existe  $y \in X$  tel que  $x = Py$ . Alors  $Px = P^2y = Py = x$ , d'où  $x = 0$ . Il s'ensuit que  $R(P) \cap N(P) = \{0\}$ .

Cela entraîne que  $X = R(P) \oplus N(P)$ .

4. Considérons une base de  $X$  adaptée à cette somme directe,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ . On a vu ci-dessus en passant que pour tout  $x \in R(P)$ ,  $Px = x$ . Donc, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $Pe_i = e_i$  et pour tout  $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$ ,  $Pe_i = 0$ . Alors

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}).$$

Ainsi,  $\underline{\text{tr } P} = r = \text{rg } P$ .

5. On a déjà vu que pour tout  $x \in R(P)$ ,  $Px = x$ , c'est-à-dire  $(I - P)x = 0$ , ou encore  $x \in N(P')$ . Ainsi,  $R(P) \subset N(P')$ .

Réciproquement, si  $x \in N(P')$ ,  $x = Px$  et  $x \in R(P)$ , donc  $N(P') \subset R(P)$ .

Ainsi,  $R(P) = N(P')$ .

Comme  $I$  et  $P$  commutent, on voit que

$$P'^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = P',$$

donc  $P'$  est un projecteur de  $X$ . En vertu de la première partie de la question

$$\underline{R(P')} = N(I - P') = \underline{N(P)}.$$

6. Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $X$ . L'application

$$\varphi : F \times G \rightarrow F + G, (x, y) \mapsto x + y$$

est clairement linéaire. Elle est surjective par construction. Donc  $\text{rg } \varphi = \dim(F + G)$ . D'après le théorème du rang,

$$\dim(F \times G) = \text{rg } \varphi + \dim N(\varphi) \geq \text{rg } \varphi = \dim(F + G).$$

Comme  $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ , on en tire que

$$\underline{\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G}.$$

7. Soit  $S = \sum_{i=1}^m P_i$  une somme finie de projecteurs. Par linéarité de la trace,

$$\underline{\text{tr } S} = \text{tr} \left( \sum_{i=1}^m P_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{tr } P_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{\text{rg } P_i}_{\in \mathbf{N}} \in \mathbf{N}.$$

Par ailleurs, soit  $x \in R(S)$  : il existe  $y \in X$  tel que

$$x = Sy = \sum_{i=1}^m \underbrace{P_i y}_{\in R(P_i)} \in \sum_{i=1}^m R(P_i).$$

Cela signifie que

$$R(S) \subset \sum_{i=1}^m R(P_i).$$

Alors, grâce au début de la question et à la question précédente,

$$\begin{aligned} \underline{\text{rg } S} = \dim R(S) &\leq \dim \left( \sum_{i=1}^m R(P_i) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \dim R(P_i) = \sum_{i=1}^m \text{rg } P_i = \underline{\text{tr } S}. \end{aligned}$$

8. Dans la somme directe  $X = R(P) \oplus N(P)$ , on sait qu'un endomorphisme de  $X$  est entièrement déterminé par ses restrictions à  $R(P)$  et  $N(P)$ . Il suffit donc d'établir l'égalité voulue sur ces deux sous-espaces vectoriels de  $X$ .

Comme  $\text{rg } P = 1$ ,  $R(P)$  est une droite : considérons donc  $e \neq 0$  tel que  $R(P) = \mathbf{R}e$ . On a

$$PTPe = PTe \in R(P).$$

Alors, il existe  $\mu \in \mathbf{R}$  tel que  $PTe = \mu e$ . Soit donc  $x \in R(P)$  : il s'écrit  $x = \lambda e$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Alors, sachant que  $Px = x$ ,

$$PTPx = PTx = \lambda PTe = \lambda \mu e = \mu x = \mu Px.$$

Soit  $x \in N(P)$ . Alors  $PTPx = 0 = \mu Px$ , car  $Px = 0$ .

Ainsi,  $PTP$  et  $\mu P$  coïncident sur  $R(P)$  et  $N(P)$ , donc ils sont égaux :

$$\underline{\text{il existe } \mu \in \mathbf{R} \text{ tel que } PTP = \mu P}.$$

9. Avec les notations de l'énoncé,  $R(P) = \mathbf{R} f_1$  et  $N(P) = \text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$ . Décomposons  $T f_1$  dans la base  $\mathcal{C}$  : il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$  tel que

$$T f_1 = \underbrace{\lambda_1 f_1}_{\in R(P)} + \underbrace{\lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n}_{\in N(P)}.$$

Par définition de  $P$ , on a donc

$$P T f_1 = \lambda_1 f_1$$

En outre,

$$P T f_1 = P T P f_1 = \mu P f_1 = \mu f_1.$$

Donc  $\lambda_1 = \mu$ . Cela signifie que la première colonne de  $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$  est

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Donc  $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$  a exactement la forme annoncée.

10. Raisonnons par contraposition et prouvons que si  $\mathbb{B}$  est la matrice d'une homothétie, alors  $P' T P'$  est proportionnel à  $P'$ . En travaillant matriciellement dans la base  $\mathcal{C}$ , cela revient à prouver que s'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\mathbb{B} = \lambda \mathbb{I}_{n-1}$ , alors  $P'_{\mathcal{C}} \mathbb{T}_{\mathcal{C}} P'_{\mathcal{C}}$  est proportionnelle à  $P'_{\mathcal{C}}$ .

Avec la question précédente, écrivons par blocs

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \mu & \mathbb{L} \\ \mathbb{C} & \lambda \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix},$$

où  $\mathbb{C} \in \mathcal{M}_{n-1,1}$  est le reste de la première colonne,  $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_{1,n-1}$  est le reste de la première ligne, et l'on suppose donc que  $\mathbb{B} = \lambda \mathbb{I}_{n-1}$ . Avec le même découpage par blocs,

$$P'_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{O}_{n-1} \end{bmatrix},$$

en notant  $\mathbb{O}_{n-1,1}$  la colonne nulle de  $\mathcal{M}_{n-1,1}$ ,  $\mathbb{O}_{1,n-1}$  la ligne nulle de  $\mathcal{M}_{1,n-1}$  et  $\mathbb{O}_{n-1}$  la matrice carrée nulle de  $\mathcal{M}_{n-1}$ . Et comme  $P' = I - P$ , naturellement

$$P'_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P'_{\mathcal{C}} \mathbb{T}_{\mathcal{C}} P'_{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \mathbb{L} \\ \mathbb{C} & \lambda \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{C} & \lambda \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \mathbb{O}_{n-1,1} & \lambda \mathbb{I}_{n-1} \end{bmatrix} = \lambda P'_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

La question est donc prouvée par contraposition.

11. Pour une homothétie, tout vecteur est lié à son image. À contrario,

puisque  $T$  n'est pas une homothétie, il existe un  $x \in X$  tel que la famille  $(x, T x)$  soit libre.

12. Fixons un tel  $x$ , et renommons-le  $e_1$ . Posons ensuite  $e_2 = T x$ . D'après la question précédente, la famille  $(e_1, e_2)$  est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $X$ . Comme  $e_2 = T e_1$ ,

par construction la matrice  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  a la forme voulue.

13. Procédons par récurrence sur  $n$ .

*Initialisation.* Si  $n = 2$ , avec la question précédente, il existe  $a$  et  $b$  réels tels que

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}.$$

Si  $\text{Tr} T = 0$ , immédiatement  $b = 0$  et la diagonale de  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  est bien nulle.

*Transmission.* Supposons que pour un  $n \geq 3$  donné, dans tout espace de dimension  $n-1$ , tout endomorphisme de trace nulle admette une matrice représentative de diagonale nulle. Soit un endomorphisme  $T$  de trace nulle d'un espace de dimension  $n$ . Si  $T$  est l'endomorphisme nul, sa matrice dans toute base est de diagonale nulle. Supposons que  $T$  n'est pas l'endomorphisme nul. Alors  $T$  ne peut-être une homothétie (de rapport forcément non nul), sinon sa trace serait non nulle. Avec la question précédente, il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  telle que

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & \mathbb{A} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}.$$

Comme  $\text{tr} T = 0$ ,  $\text{tr} \mathbb{A} = 0$ . Considérons l'endomorphisme  $A$  de  $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$  dont la matrice est  $\mathbb{A}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base  $(e'_2, \dots, e'_n)$  dans laquelle la matrice  $\mathbb{A}'$  de  $A$  est de diagonale nulle. Et dans la base  $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_n)$ , on a

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}' & \\ \times & & & \end{bmatrix}.$$

Et cette matrice est de diagonale nulle.

*Conclusion.* Par récurrence,

tout endomorphisme de trace nulle admet une matrice représentative de diagonale nulle.

14. Prenons  $n = 2$ . Soit  $T$  tel que  $\text{tr} T = t_1 + t_2$ . Considérons l'endomorphisme  $U = T - t_1 I$ . Il n'est pas une homothétie, sinon  $T$  le serait. D'après la question 11, il existe une base  $\mathcal{B}'' = (e_1, e_2)$  de  $X$  telle que  $e_2 = U e_1$ . Il existe donc  $a$  et  $b$  réels tels que

$$\mathbb{U}_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}.$$

Comme  $\text{tr} U = \text{tr} T - 2 t_1 = t_2 - t_1$ , on a  $b = t_2 - t_1$ . Alors

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}''} = \mathbb{U}_{\mathcal{B}''} + t_1 \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} t_1 & a \\ 1 & t_2 \end{bmatrix}.$$

**15.** Avec la propriété admise par l'énoncé, il existe un projecteur  $L$  de rang 1 de  $X$  tel que  $LTL = t_1 L$  et que  $L'TL'$  ne soit pas proportionnel à  $L'$ . D'après la question 9, il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $X$  telle que

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} t_1 & \times & \times \\ \times & & \mathbb{B} \\ \times & & \end{bmatrix}.$$

Et d'après la question 10,  $\mathbb{B}$  n'est pas la matrice d'une homothétie car  $L'TL'$  n'est pas proportionnel à  $L'$ .

**16.** Procédons comme à la question 13.

*Initialisation.* Elle a été faite à la question 14.

*Transmission.* Supposons la propriété vraie au rang  $n - 1$ . Avec la question précédente, il existe  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  telle que

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} t_1 & \times & \times \\ \times & & \mathbb{B} \\ \times & & \end{bmatrix}$$

où  $\mathbb{B}$  n'est pas une homothétie. Considérons l'endomorphisme  $B$  de  $Y = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$  de matrice  $\mathbb{B}$  dans la base  $(e_2, \dots, e_n)$ . Ce n'est pas une homothétie, et bien-sûr,

$$\text{tr } B = \text{tr } \mathbb{B} = \text{tr } \mathbb{T}_{\mathcal{C}} - t_1 = \sum_{i=2}^n t_i.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base  $(e'_2, \dots, e'_n)$  de  $Y$  dans laquelle la matrice de  $B$  a sur la diagonale les coefficients  $t_i$ ,  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , dans cet ordre. Alors dans la base  $\mathcal{B}'' = (e_1, e'_2, \dots, e'_n)$  de  $X$ , la matrice  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$  a sur la diagonale les coefficients  $t_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , dans cet ordre.

*Conclusion.* Par récurrence,

la proposition de l'énoncé est vraie.

**17.** Considérons un supplémentaire  $F$  de  $N(T)$  :  $X = F \oplus N(T)$ ; c'est possible puisque  $X$  est de dimension finie. On sait que

$$\dim F = \dim X - \dim N(T) = \dim R(T) = \rho.$$

Dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$  adaptée à cette somme directe,  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  a la forme souhaitée.

**18.** On a  $\theta \in \mathbf{N}$  et  $\theta \geq \rho$ . Donc on peut écrire

$$\theta = \sum_{i=1}^{\rho} t_i$$

où  $t_i \in \mathbf{N}^*$  pour  $i \in \llbracket 1, \rho \rrbracket$ . Par exemple, si  $\rho \geq 2$ , on peut choisir

$$t_1 = \dots = t_{\rho-1} = 1, \quad t_\rho = \theta - \rho + 1 \geq 1.$$

Et bien-sûr, si  $\rho = 1$ , on prend directement  $t_1 = \theta$ .

Considérons l'endomorphisme  $T_1$  de  $F$  dont la matrice dans  $(e_1, \dots, e_\rho)$  est  $\mathbb{T}_1$ . Bien-sûr,  $T_1$  n'est pas une homothétie puisque  $T$  ne l'est pas, et

$$\text{tr } T_1 = \theta = \sum_{i=1}^{\rho} t_i.$$

D'après la question 16, il existe une base  $(e'_1, \dots, e'_\rho)$  de  $F$  dans laquelle la matrice de  $T_1$  est

$$\mathbb{T}'_1 = \begin{bmatrix} t_1 & \times & \times \\ \times & \ddots & \times \\ \times & \times & t_\rho \end{bmatrix}.$$

Alors, dans la base  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$  de  $X$ , la matrice  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$  a la forme voulue.

**19.** Décomposons cette matrice en la somme de matrices où l'on ne conserve qu'une colonne non nulle. En notant  $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_\rho$  les  $\rho$  premières colonnes et laissant vide les blocs de 0, écrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\mathcal{B}'} &= [\mathbb{C}_1 \quad \mathbb{C}_2 \quad \dots \quad \mathbb{C}_\rho] \\ &= \sum_{j=1}^{\rho} \begin{bmatrix} & & & \mathbb{C}_j & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où  $\mathbb{C}_j$  est en position  $j$ . De plus, en disant que  $t_j = \sum_{i=1}^{t_j} 1$ , découpons encore, en constatant que  $t_j$  et les 1 sont sur la ligne  $j$  :

$$\mathbb{C}_j = \begin{bmatrix} \times \\ t_j \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 1 \\ \times \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{t_j-1} \begin{bmatrix} & & & 1 & & \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\begin{bmatrix} & & & \mathbb{C}_j & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \times & & & & \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{t_j-1} \begin{bmatrix} & & & 1 & & \end{bmatrix}.$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & & \end{bmatrix},$$

où le 1 est en position  $(j, j)$ , est clairement la matrice d'un projecteur. Et c'est aussi le cas, un peu moins clairement, pour la matrice

$$\begin{bmatrix} \times \\ 1 \\ \times \end{bmatrix}.$$

Où l'on a bien réussi à décomposer  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$  en somme finie de projecteurs.

$T$  est donc une somme finie de projecteurs.

**20.** Supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{T}_1 = \lambda \mathbb{I}_\rho$ . Comme  $\text{tr } T = \text{tr } \mathbb{T}_1 = \lambda \rho$  et que  $\text{tr } T \geq \rho$ , on en tire que  $\lambda \geq 1$ .

Si  $\lambda = 1$ , on se ramène directement au cas précédent en posant  $t_1 = \dots = t_\rho = 1$ . Par conséquent,  $T$  est bien somme de projecteurs.

Si  $\lambda > 1$ , introduisons le projecteur  $P$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  de la question 17 est

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \end{bmatrix},$$

où l'on a encore laissé vide tous les blocs de 0. Alors l'endomorphisme  $T' = T - P$  est représenté dans la base  $\mathcal{B}$  par la matrice

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{B}} = \mathbb{T}_{\mathcal{B}} - \mathbb{P}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}'_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$

où  $\mathbb{T}'_1 = \text{diag}(\lambda - 1, \lambda, \dots, \lambda)$  n'est pas la matrice d'une homothétie. En outre,  $\mathbb{T}'_{\mathcal{B}}$  contient  $n - \rho$  colonnes nulles donc  $\text{rg } T' \leq \rho$ . Enfin, puisque  $\rho \in \mathbf{N}$ ,

$$\text{tr}(T') = \text{tr } T - 1 = \lambda \rho - 1 > \rho - 1 \geq \rho \geq \text{rg } T'.$$

Alors, on se ramène au cas précédent pour  $T'$ , qui est donc la somme de projecteurs. Comme  $T = T' + P$ ,

$T$  est encore une somme finie de projecteurs.