Corrigé du huitième devoir surveillé

EXERCICE 1

Q1. Soient A, M, N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M+N) &= A(\lambda M+N)\\ &= \lambda AM + AN = \lambda\varphi_A(M)+\varphi_A(N),\end{aligned}$$

donc φ_A est linéaire. Et bien-sûr, $\varphi_A(M)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, $\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$

Q2. Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\varphi_{AB}(M) = (AB)M = A(BM) = \varphi_A(\varphi_B(M)),$$

donc $\boxed{\varphi_{AB} = \varphi_A\circ\varphi_B.}$

Q3. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Supposons que A est inversible. Alors,

$$\varphi_A\circ\varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\,.$$

Cela signifie que φ_A est inversible à droite. Comme φ_A est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, cela entraine que φ_A est bijective.

Supposons que φ_A est bijective. Alors

$$\varphi_A\circ(\varphi_A)^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})},$$

donc, en évaluant en I_n,

$$\varphi_A((\varphi_A)^{-1}(I_n)) = I_n,$$

c'est-à-dire

$$A\cdot(\varphi_A)^{-1}(I_n) = I_n.$$

Où l'on voit que A admet un inverse à droite. Comme c'est une matrice carrée, elle est donc inversible.

$\boxed{\text{Finalement, } \varphi_A \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ si et seulement si } A \text{ est inversible.}}$

Q4. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale : 1 et a.

Si $a=1$, 1 est valeur propre double, donc A n'est pas diagonalisable, sinon elle serait semblable à I_2.

Si $a\neq 1$, A est diagonalisable, car elle admet deux valeurs propres distinctes.

$\boxed{\text{Ainsi, } A \text{ est diagonalisable si et seulement si } a\neq 1.}$

Q5. Nommons E_1, E_2, E_3, E_4 les matrices de la base canonique $\mathcal{C}$. Sans difficulté,

$$\varphi_A(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = E_1,$$

$$\varphi_A(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = E_2,$$

$$\varphi_A(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix}1&0\\a&0\end{pmatrix} = E_1 + aE_3,$$

$$\varphi_A(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix}0&1\\0&a\end{pmatrix} = E_2 + aE_4.$$

Donc

$$\boxed{M_A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}.}$$

Q6. Cette matrice est triangulaire, donc à nouveau, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale.

Cas où $a=1$: $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_A)=\{1\}.}$ On a

$$\mathrm{rg}(M_A - I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = 2,$$

donc $\boxed{\dim E_1(\varphi_A) = 2.}$

Cas où $a\neq 1$: $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_A)=\{1,a\}.}$ On a

$$\mathrm{rg}(M_A - I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&a-1&0\\0&0&0&a-1\end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{et } \mathrm{rg}(M_A - aI_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1-a&0&1&0\\0&1-a&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = 2,$$

donc $\boxed{\dim E_1(\varphi_A) = \dim E_a(\varphi_A) = 2.}$

Q7. Dans tous les cas, χ_{φ_A} est scindé sur $\mathbb{C}$, comme tout polynôme complexe.

Dans le premier cas, φ_A n'est pas diagonalisable, car 1 est valeur propre quadruple et $\dim E_1(\varphi_A)\neq 4$.

Et dans le second cas, φ_A est diagonalisable, car 1 et a sont valeurs propres doubles et l'on a bien $\dim E_1(\varphi_A) = \dim E_a(\varphi_A) = 2$.

$\boxed{\text{Finalement, } \varphi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } a\neq 1, \text{ c'est-à-dire si et seulement si } A \text{ est diagonalisable.}}$

Q8. $\boxed{\text{Oui,}}$ par une récurrence immédiate grâce à la question Q2.

Q9. Soient $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P\in\mathbb{C}[X]$. Écrivons

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k,$$

où la somme est en fait finie. Alors avec la question Q8,

$$\begin{aligned}P(\varphi_A)(M) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\varphi_A^k(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\varphi_{A^k}(M)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k M = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k\right) M\\ &= P(A)M = \varphi_{P(A)}(M).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}.}$

Commentaire. Redisons-le : les sommes considérées ici sont finies.

Q10. Une matrice, respectivement un endomorphisme, est diagonalisable si et seulement si elle, resp. il, admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples.

Si A est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples tel que $P(A) = O_n$. Avec la question Q9, il s'ensuit que

$$P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)} = \varphi_{O_n} = 0_{\mathfrak{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}.$$

Donc P est annulateur de φ_A et φ_A est diagonalisable.

Réciproquement, si φ_A est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples tel que $P(\varphi_A) = 0_{\mathfrak{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$. Alors

$$O_n = P(\varphi_A)(I_n) = \varphi_{P(A)}(I_n) = P(A)\,I_n = P(A).$$

Donc P est annulateur de A et A est diagonalisable.

A et φ_A sont donc simultanément diagonalisables.

Q11. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = O_n$ donc avec la question Q9,

$\chi_A(\varphi_A) = 0_{\mathfrak{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$.

En outre, les valeurs propres de φ_A sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, donc en particulier celles de χ_A, les valeurs propres de A. On en tire que $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

Réciproquement, χ_{φ_A} est annulateur de φ_A, donc de A (comme à la question Q10) et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

Q12. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi_A)$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(\varphi_A) &\iff \varphi_A(M) = \lambda M \\ &\iff AM = \lambda M \\ &\iff (A - \lambda I_n)M = O_n \\ &\iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \\ &\iff \mathrm{Im}(M) \subset E_\lambda(A). \end{aligned}$$

Cette dernière assertion signifie que les colonnes de M sont toutes dans $E_\lambda(A)$, car $\mathrm{Im}(M)$ est engendrée par les colonnes de M. Ainsi,

$E_\lambda(\varphi_A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(M) \subset E_\lambda(A)\}$.

Q13. Si A est diagonalisable, φ_A l'est aussi avec la question Q10. Dans ce cas, sachant que les multiplicités des valeurs propres sont égales aux dimensions des sous-espaces propres, pour A et pour φ_A, on a

$$\det(\varphi_A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)} \lambda^{\dim(E_\lambda(\varphi_A))}.$$

Or $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \mathrm{Sp}(A)$ et avec la remarque de l'énoncé,

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim(E_\lambda(\varphi_A)) = n \dim(E_\lambda(A)).$$

Donc

$$\begin{aligned} \det(\varphi_A) &= \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{n \dim(E_\lambda(A))} \\ &= \left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{\dim(E_\lambda(A))} \right)^n \\ &= (\det(A))^n. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\varphi_A) &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)} \lambda \dim(E_\lambda(\varphi_A)) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda n \dim(E_\lambda(A)) \\ &= n\,\mathrm{Tr}(A). \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{n \to +\infty} t^n e^{-t^2} t^2 = 0$$

ce qui signifie qu'en $+\infty$,

$$t^n e^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$, il en est de même pour $t \mapsto t^n e^{-t^2}$. Enfin, la fonction $t \mapsto |t|^n e^{t^2}$ est paire, donc par parité, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q15. Tout polynôme R est combinaison linéaire de monômes, donc $t \mapsto R(t)\,e^{t^2}$ est combinaison linéaire de fonctions comme en Q14. Comme telle, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q16. On vient de voir que $\varphi(P, Q)$ a bien un sens.

Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, φ est symétrique.

Par linéarité de l'intégrale, φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est donc bilinéaire.

Par positivité de l'intégrale, φ est positive.

Enfin, si $\varphi(P, P) = 0$, puisque $t \mapsto P(t)^2 e^{t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, elle est nulle, donc P aussi.

Ainsi, φ est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q17. D'après le théorème fondamental de l'analyse, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive nulle en 0 de la fonction continue $t \mapsto e^{-t^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = e^{-x^2}$.

Q18. Considérons $I=[0,1]$, $A=\mathbb{R}$ et

$$g \left| \begin{array}{ccc} A\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}, \end{array}\right.$$

de sorte que pour tout $x\in A$, $v(x)=\displaystyle\int_I g(x,t)\,\mathrm{d}t$.

◦ Par opérations usuelles, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A\times I$, ce qui entraine que pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; que pour tout $x\in A$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-2\,x\,e^{-(1+t^2)x^2};$$

et que pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ et $t\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur I.

◦ En outre, grâce à la continuité, pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.

◦ Enfin, pour tout segment $[a,b]\subset A$ et tout $(x,t)\in[a,b]\times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant 2\max(|a|,|b|),$$

où la fonction $t\mapsto 2\max(|a|,|b|)$ est constante donc intégrable sur I.

Grâce au théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, il en découle que

• pour tout $x\in A$, $t\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I, ce qui n'est pas une surprise puisqu'elle est continue sur ce segment ;

• que v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de A, donc sur A ;

• et que pour tout $x\in A$,

$$v'(x)=\int_I\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=-2\,x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q19. La fonction u^2+v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(u^2+v)'(x)&=2\,u'(x)\,u(x)+v'(x)\\ &=2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-2\,x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Si $x=0$, cette expression est clairement nulle. Sinon, dans la première intégrale, posons $t=x\,s$, qui est un changement de variable licite car bijectif et $\mathscr{C}^1$. Alors

$$\begin{aligned}(u^2+v)'(x)&=2\,x\,e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2s^2}\,\mathrm{d}s\\ &\quad-2\,x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\,\mathrm{d}t\\ &=2\,x\int_0^1 e^{-(1+s^2)x^2}\,\mathrm{d}s\\ &\quad-2\,x\int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2}\,\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

Alors, u^2+v est constante. Cette constante vaut

$$(u^2+v)(0)=v(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\operatorname{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}.$$

Q20. Puisque $t\mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En outre, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|v(x)|=e^{-x^2}\int_0^1\underbrace{\frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}t\leqslant e^{-x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Commentaire. Il n'est pas utile d'invoquer ici le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Enfin, puisque la fonction est constante,

$$\lim_{x\to+\infty}u^2(x)+v(x)=\frac{\pi}{4}.$$

Alors, grâce à ces limites,

$$\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2=\frac{\pi}{4},$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

puis par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}.$$

Q21. Procédons par récurrence.

Bien-sûr, H_0 est de degré 0 et de coefficient dominant $1=2^0$.

Supposons que pour un certain n, H_n soit de degré n et de coefficient dominant 2^n. Alors $\deg(H_n')<\deg(X\,H_n)$, donc $\deg(H_{n+1})=\deg(X\,H_n)=n+1$. En outre, le coeficient dominant de H_{n+1} est celui de $2\,X\,H_n$, c'est-à-dire 2^{n+1}. Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, H_n est bien de degré n et de coefficient dominant 2^n.

Q22. Là aussi, procédons par récurrence.

Clairement, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f^{(0)}(x)=f(x)=(-1)^0\,H_0(x)\,f(x).$$

Supposons que pour un certain n et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\,H_n(x)\,f(x).$$

Alors en dérivant,

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=(f^{(n)})'(x)\\ &=(-1)^n\,(H_n'(x)\,f(x)+H_n(x)\,f'(x))\\ &=(-1)^n\,(H_n'(x)\,f(x)-H_n(x)\,2\,x\,f(x))\\ &=(-1)^{n+1}\,(2\,x\,H_n(x)-H_n'(x))\,f(x)\\ &=(-1)^{n+1}\,H_{n+1}(x)\,f(x),\end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\,H_n(x)\,f(x).$$

Q23. Faisons encore une récurrence, sur $k \in [\![0, q]\!]$.

Avec la question Q22, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{(q)}(t) = (-1)^q H_q(t) f(t)$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(H_p, H_q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) H_q(t) f(t) \,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^q \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(0)}(t) f^{(q-0)}(t) \,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et la propriété est initialisée pour $k = 0$.

Supposons qu'elle soit vraie au rang $k \in [\![0, q-1]\!]$. Alors en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\varphi(H_p, H_q) &= (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) \,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^{q-k} \left(\left[H_p^{(k)}(t) f^{(q-k-1)}(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ &\qquad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k+1)}(t) f^{(q-k-1)}(t) \,\mathrm{d}t \right).\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est bien valide : en effet, d'après la question Q15, pour tout polynôme R, $R\,f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; or $H_p^{(k)} f^{(q-k)}$ s'écrit sous cette forme grâce à la question Q22. Ainsi, les deux intégrales ont un sens. Donc le crochet aussi. Mieux, ce crochet est nul car pour tout polynôme R, $\lim_{\pm\infty} R f = 0$, par croissances comparées. Alors

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k+1)}(t) f^{(q-k-1)}(t) \mathrm{d}t$$

et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la relation est vraie pour tout $k \in [\![0, q]\!]$.

Q24. Soient $p < q$ dans $[\![0, d]\!]$. Avec la question précédente appliquée en $k = q$,

$$\varphi(H_p, H_q) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(q)}(t) f^{(q-q)}(t) \,\mathrm{d}t.$$

Mais avec la question Q21, $\deg(H_p) = p < q$, donc $H_p^{(q)} = 0$ et $\varphi(H_p, H_q) = 0$. Comme p et q jouent des rôles symétriques, c'est encore vrai si $q < p$. Ainsi, les polynômes H_p sont orthogonaux deux à deux et

$(H_p)_{0 \leqslant p \leqslant d}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q25. Soit $p \in \mathbb{N}$. Avec les questions Q23, Q21 et Q20,

$$\begin{aligned}\varphi(H_p, H_p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(p)}(t) f^{(p-p)}(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^p p! f(t) \,\mathrm{d}t = 2^p p! \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

La norme de H_p vaut donc $\sqrt{2^p p!} \sqrt[4]{\pi}$.

Q26. D'après le cours, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

donc en remplaçant successivement par $2\,x\,z$ et $-z^2$,

$$\begin{cases} \exp(2\,x\,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \frac{z^n}{n!}, \\ \exp(-z^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}. \end{cases}$$

Les deux développements ont pour rayon de convergence $+\infty$.

Q27. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(-(x-z)^2) = e^{-x^2} \exp(2\,x\,z) \exp(-z^2).$$

D'après la question précédente, les deux fonctions $z \mapsto \exp(2\,x\,z)$ et $z \mapsto \exp(-z^2)$ sont développables en série entière, donc par produit de Cauchy,

la fonction $z \mapsto \exp(-(x-z)^2)$ est développable en série entière.

De plus le rayon de convergence du produit de Cauchy est supérieur au minimum des précédents, donc il vaut $+\infty$.

Q28. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = f(x-t)$. On vient de dire que

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Et l'on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

Or, avec la question Q22,

$$g^{(n)}(0) = (-1)^n f^{(n)}(x) = H_n(x) f(x) = H_n(x) e^{-x^2}.$$

Donc

$$c_n = \frac{H_n(x) e^{-x^2}}{n!}.$$

Alors, grâce au calcul du début de la question Q27, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\exp(2\,x\,z - z^2) &= e^{x^2} f(x-t) \\ &= e^{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x) e^{-x^2}}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n\end{aligned}$$

et le rayon de convergence est $+\infty$.

Q29. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$|g_n(\theta)| = \left| \frac{H_n(x)}{n!} \right|,$$

donc

$$\|g_n\|_\infty^{[0,2\pi]} = \left| \frac{H_n(x)}{n!} \right|.$$

Or la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{H_n(x)}{n!}$$

converge absolument car on reconnait le terme général du développement en série entière précédent pour $z = 1$.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

Q30. Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

CALCUL FORMEL.

$$\int_0^{2\pi} G_x(e^{i\theta})\, e^{-ip\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}
(1) \qquad &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, e^{in\theta} \right) e^{-ip\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
(2) \qquad &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\
(3) \qquad &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\
(4) \qquad &= \frac{H_p(x)}{p!}\, 2\pi.
\end{aligned}$$

JUSTIFICATIONS.
(1) D'après la question Q28, appliquée en $z = e^{i\theta}$.
(2) En distribuant $e^{-ip\theta}$.
(3) D'après la question Q29, grâce à la convergence normale donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} g_n$, sachant que les g_n sont continues sur $[0, 2\pi]$, la permutation est permise.
(4) Pour $n \in \mathbb{N}$, si $n \neq p$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g_n(\theta)\, \mathrm{d}\theta &= \frac{H_n(x)}{n!} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{H_n(x)}{n!} \left[\frac{e^{i(n-p)\theta}}{i\,(n-p)} \right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Mais si $n = p$,

$$\int_0^{2\pi} g_p(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{H_p(x)}{p!} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{d}\theta = \frac{H_p(x)}{p!}\, 2\pi.$$

EXERCICE 3

Q31. Pour tout $n \geqslant 1$, $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} B_k$ donc

$$p_{n+1} \leqslant p_n.$$

La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge car elle décroit et est minorée par 0.

On peut écrire artificiellement

$$E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k \right),$$

donc d'après le théorème de la continuité décroissante,

$$P(E) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k \right) = \lim_{n\to+\infty} p_n.$$

Q32. Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé, cela signifie que l'on n'a tiré que des boules blanches lors des k premiers tirages, donc qu'on a rajouté u_i boules blanches à chaque tirage :

l'urne contient alors la boule rouge et S_k boules blanches.

Donc, puisque l'urne contient à ce moment-là S_k boules blanches sur $S_k + 1$ boules au total,

$$P\left(B_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k} B_i \right) = \frac{S_k}{S_k + 1}.$$

Q33. D'après les probabilités composées,

$$\begin{aligned}
p_n &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k \right) \\
&= P(B_1) \prod_{k=1}^{n-1} P\left(B_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k} B_i \right) \\
&= \frac{S_0}{S_0 + 1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1}.
\end{aligned}$$

Q34. Pour tout k, $u_k \geqslant 1$, donc la série $\sum u_k$ diverge grossièrement et la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

Q35. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $S_k \to +\infty$, $1/S_k \to 0$ donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1} \right) &= -\ln\left(\frac{S_k + 1}{S_k} \right) \\
&= -\ln\left(1 + \frac{1}{S_k} \right) \sim -\frac{1}{S_k}.
\end{aligned}$$

Puisque ces termes ont des signes constants,

$$\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1} \right) \text{ et } \sum \frac{1}{S_k} \text{ ont même nature.}$$

Q36. D'après la question Q31, dire que $P(E) = 0$ signifie que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, donc que la suite $(\ln(p_n))_{n\geqslant 1}$ diverge vers $-\infty$. Or, d'après la question Q33,

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1} \right),$$

donc avec la question Q35,

$P(E) = 0$ si et seulement si $\sum 1/S_k$ diverge.

Q37. Ici, $u_n = 1$ donc $S_n = n + 1$. Ainsi, $\sum 1/S_n$ diverge et $P(E) = 0$.

Q38. En choisissant $u_n = n$,

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n\,(n+1)}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} n^2$$

donc $\sum 1/S_n$ converge et $P(E) \neq 0$.