

Exercices de révisions

164 ————— **CS**

Pour tout nombre premier $p \geq 5$, $24 \mid p^2 - 1$.

165 ————— **CS**

Soient p , q et r trois projecteurs d'un espace vectoriel réel E de dimension finie. L'endomorphisme $s = p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}$ est-il un projecteur de E ?

166 ————— **TPE**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E . On pose

$$L = \{u \in \mathfrak{L}(E, F) \mid G \subset \text{Ker}(u)\}.$$

1. Montrer que L un sous-espace de $\mathfrak{L}(E, F)$.

2. En donner la dimension.

167 ————— **MP**

Équivalent en l'infini de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$.

168 ————— **CCINP25**

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

169 ————— **CS**

Étudier les extrémums de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{2} - \sqrt{4 - x^2} \cos y.$$

170 ————— **MP**

Montrer que pour tous réels x_1, \dots, x_n de \mathbb{R}_+^* ,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

171 ————— **EIVP17**

Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

172 ————— **CCP**

Soit $\alpha > 0$. Nature de $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$.

173 ————— **ENS**

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p$.

174 ————— **AM**

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où $(\alpha, \beta, a_0) \in (\mathbb{C}^*)^3$, $a_{2p} = \alpha a_{2p-1}$ si $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_{2p+1} = \beta a_{2p}$ si $p \in \mathbb{N}$.

175 ————— **MT**

Considérons la suite réelle définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

176 ————— **AM**

Étudier la continuité et la classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 de la fonction définie par $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

177 ————— **MP17**

Étudier la classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 de la fonction définie par $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

178 ————— **MP**

Calculer A^n où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

179 ————— **CCP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $\Phi(P)(X) = P(X+1)$.

1. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de E .

2. Déterminer Φ^{-1} .

180 ————— **CCP**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t + 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + x^2}.$$

181 ————— **MT**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$. Considérons l'endomorphisme

$$\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A.$$

1. Est-il diagonalisable ?

2. Déterminer ses éléments propres.

182 ————— **CCP**

Calculer $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ à 10^{-3} près.

183 ————— **CCP**

Étudier sur $[0, 1]$ la convergence de la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \sin(n^2 x) e^{-n^2 x}$.

184 ————— **CCP**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$. Pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, posons $f(M) = 2 \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.

2. Est-il diagonalisable ?

185 ————— CCP

1. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E . Si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'elle l'est aussi pour $v \circ u$.

2. Montrer que c'est encore valable pour $\lambda = 0$ si E est de dimension finie.

3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on pose

$$u(P) = P' \text{ et } v(P) = \int_0^X P(t) dt.$$

Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$.

186 ————— TPE

1. Domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt.$$

2. Exprimer f à l'aide des fonctions Γ et

$$\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

187 ————— MT

1. Soit (a_n) est une suite périodique non nulle. Donner le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.

2. Calculer sa somme pour $z \in D(0, R)$.

3. La série $\sum a_n R^n e^{in\theta}$ converge-t-elle ?

188 ————— CCP

1. Étudier l'intégrabilité sur \mathbb{R}_+^* de la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)}.$$

2. Calculer la limite de la suite de terme général

$$u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

189 ————— CCP16

Reconnaitre l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

190 ————— MP

1. Montrer que l'application $f : P \mapsto P - P'$ est bijective sur $\mathbb{R}_n[X]$, d'abord en utilisant sa matrice, puis sans l'utiliser.

2. Pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, résoudre $P - P' = Q$.

191 ————— CCP

On considère trois complexes a, b, c tels que $b \neq c$ et la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $a_{ii} = a$, $a_{ij} = b$ si $j > i$ et $a_{ij} = c$ si $j < i$. On nomme J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que $\det(A + xJ)$ est un polynôme en x de degré au plus 1 et calculer $\det(A)$.

192 ————— CCP

Soient $n \geq 4$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & (0) & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & (0) & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .

2. Donner le sous-espace propre associé.

3. Déterminer les autres éléments propres de A .

193 ————— ENS

Soient A continue sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et X de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X'(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}(X(t)^k)$ ne dépend pas de t .

2. Montrer que les valeurs propres de $X(t)$ ne dépendent pas de t .

3. Montrer que $X(t)$ est semblable à $X(0)$.

194 ————— CCP

$$\text{Nature de la série } \sum \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}.$$

195 ————— CCP

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice p et qui commute avec sa transposée. Montrer que AA^T est nilpotente et en déduire la matrice A .

196 ————— CCP

Considérons l'ensemble ℓ^1 des suites réelles $u = (u_n)_{n \geq 0}$ telles que la série $\sum u_n$ converge absolument. Pour une telle suite, posons

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|.$$

1. Montrer que ℓ^1 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent trois normes sur ℓ^1 .

3. Sont-elles équivalentes ?

197 ————— CCP

Trouver les matrices A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

198 ————— CS

1. Montrer que si une série réelle $\sum u_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

2. Est-ce encore vrai si la série $\sum u_n$ est seulement semi-convergente ?

199 ————— CS

$$\text{Nature de la série } \sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{n/2}.$$

200 ————— **ENSEA**Nature de la série $\sum_{n \geq 2} (\ln n)^{-\ln n}$.**201** ————— **CCP**Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.**202** ————— **MT**Montrer que M et T sont semblables, avec

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

203 ————— **IIE**Montrer que A et T sont semblables, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

204 ————— **CCP**

Montrer que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2, \quad \text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A) \text{Tr}(B).$$

205 ————— **CCINP25**Étudier la continuité et la classe \mathcal{C}^1 de la fonction définie par $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

206 ————— **TPE**On se donne une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on note f sa somme.Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p \geq 1$. On s'intéresse à la série $\sum P(n) a_n x^n$ dont on note R' le rayon de convergence et g la somme.**1.** Montrer que, pour n assez grand, $|P(n)| \geq 1$. Qu'en déduit-on pour R' ?**2.** Montrer que la famille

$$(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \cdots (X-p+1))$$

est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. En déduire que $R' = R$ et exprimer g en fonction des dérivées de f .**3.** Déterminer le rayon de convergence puis la somme de

$$\sum \frac{n^2 2^n + 2^n}{n!} x^n.$$

207 ————— **MT**Rayon de convergence de $\sum [e^n] z^n$.**208** ————— **CCP****1.** Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables et vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'ils admettent une base de vecteurs propres commune.**2.** Soit M une matrice complexe symétrique, de partie réelle $R(M)$ et de partie imaginaire $I(M)$. Montrer que si $I(M)$ et $R(M)$ commutent, M est diagonalisable.**209** ————— **CCP**Pour $0 \leq k \leq n$, on pose

$$P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}.$$

Montrer la famille (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Exprimer les X^k dans cette base.**210** ————— **CCP****1.** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X = 0.$$

2. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.**211** ————— **CCP****1.** Domaine de définition de la série des fonctions

$$u_n : x \mapsto \frac{\ln(1+n^2 x^2)}{n^2 \ln(1+n)}.$$

2. Montrer la classe \mathcal{C}^1 sur cet ensemble de la somme de la série de ces fonctions.**212** ————— **CCP**Soient $x_0 \in E \setminus \{0\}$ et φ une forme linéaire non nulle d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E .**1.** Montrer que l'application $u : x \mapsto x + \varphi(x)x_0$ est un endomorphisme de E qui admet 1 pour valeur propre. Déterminer $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$.**2.** Donner une CNS pour que u soit diagonalisable.**213** ————— **CCP****1.** Montrer que si λ est valeur propre d'une matrice A , alors λ est racine de tout polynôme annulateur de A .**2.** Déterminer les matrices symétriques réelles A telles que $A^3 + 4A = 5I_n$.**214** ————— **CCP16****1.** Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de l'endomorphisme f défini par

$$f(P)(X) = (X-a)P'(X) + P(X) - P(a).$$

2. Déterminer son noyau, son image, ses éléments propres.**215** ————— **CCP16**Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.**1.** Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) .**2.** Mêmes questions pour la série de fonctions $\sum f_n$.**216** ————— **CCP17****1.** Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $e^x = nx$ admet deux solutions x_n et y_n telles que $0 \leq x_n < y_n$.**2.** Étudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n) et leur convergence vers des limites à déterminer.**3.** Quand n tend vers $+\infty$, montrer que $x_n \sim 1/n$. Trouver un équivalent de $x_n - 1/n$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n .**4.** Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1 + \varepsilon) \ln n$.

217 ————— CCP

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Étudier la série $\sum u_n$.

218 ————— CCP16

On considère des variables aléatoires indépendantes X_n qui suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0, 1[$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = p.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

219 ————— CCP

Soient $(p, q) \in [0, 1]^2$ et deux variables aléatoires X et Y de covariance nulle avec $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$.

1. Montrer que $P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1)$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes.

220 ————— CCP17

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = & y - z, \\ y' = -2x + & y - z, \\ z' = -2x + 3y + & z. \end{cases}$$

221 ————— CCP

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^\top M = M M^\top$. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de $S = M^\top M$. En déduire que $\frac{1}{2}M \in O(2)$.

2. Déterminer toutes les matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^\top M = M M^\top$.

222 ————— CCP

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A n'admet aucun polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 2.
2. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1} .
3. Quels sont tous les polynômes qui annulent A ?

223 ————— MP17

Soit un espace euclidien E . Montrer que

- 1° $\forall f \in \mathcal{S}^+(E)$, $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$;
- 2° $\forall f \in \mathcal{S}^+(E)$, $\exists h \in \mathcal{S}^+(E)$, $h^2 = f$;
- 3° $\forall (f, g) \in \mathcal{S}^+(E)^2$, $\begin{cases} \text{Ker}(f+g) = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g, \\ \text{Im}(f+g) = \text{Im } f + \text{Im } g. \end{cases}$

224 ————— MP17

1. Montrer la classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh } t}{t} e^{-xt} dt.$$

2. Expliciter f .

225 ————— MP17

Extrémums de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

226 ————— MP17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$.

227 ————— MP18

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

228 ————— CCP18

1.a. Soit $x \in [0, 1]$. Donner les variations sur $[0, 1]$ de la fonction

$$g_x : t \mapsto t + \frac{x - t^2}{2}.$$

b. Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$ est dans l'intervalle $[0, 1]$, qu'elle est croissante et en déduire qu'elle converge vers une limite à déterminer.

2.a. On considère $P_0(x) = 1$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}.$$

Montrer que P_n est dérivable, que

$$P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + P'_n(x)(1 - P_n(x)),$$

puis que P_n est croissante.

b. Montrer que

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \left(1 - \frac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2}\right).$$

En déduire par récurrence que

$$0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0).$$

c. Montrer que (P_n) converge uniformément vers une fonction à déterminer.

229 ————— CCP18

Soit (a, b) une famille libre d'un espace euclidien E de dimension n .

1. Montrer que l'application définie par

$$\phi(x) = \langle x, b \rangle a + \langle x, a \rangle b$$

est un endomorphisme de E dont on précisera le noyau et l'image.

2. Trouver les valeurs propres de ϕ .

Est-il diagonalisable? Symétrique?

230 ————— CCP18

Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = B$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AB^k = B^k(A + kI_n)$.
2. En déduire que $\det B = 0$.

231 ————— CS18

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Considérons l'ensemble E_X des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui admettent X comme vecteur propre.

1. Montrer que E_X est un espace vectoriel.
2. Déterminer sa dimension.