

Corrigés des exercices de révision

164 ————— **CS**

On a $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Les entiers $p - 1$ et $p + 1$ sont deux entiers pairs consécutifs, donc l'un est multiple de 2 et l'autre de 4. Donc $p^2 - 1$ est multiple de 8.

En outre, $p - 1$, p et $p + 1$ sont trois entiers consécutifs, donc l'un est multiple de 3. Ce n'est pas p , qui est premier, donc c'est $p - 1$ ou $p + 1$. Alors $p^2 - 1$ est multiple de 3.

Comme 8 et 3 sont premiers entre eux, $p^2 - 1$ est multiple de 24.

165 ————— **CS**

Si $q = r = 0$, $s = p$ est un projecteur.

Supposons que s soit un projecteur. D'une part,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} s &= \operatorname{Tr} s = \operatorname{Tr} p + \sqrt{2} \operatorname{Tr} q + \sqrt{3} \operatorname{Tr} r \\ &= \operatorname{rg} p + \sqrt{2} \operatorname{rg} q + \sqrt{3} \operatorname{rg} r \\ &\geq \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q + \operatorname{rg} r. \end{aligned}$$

D'autre part, comme on sait que si u et v sont dans $\mathfrak{L}(E)$, $\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$, et si $\lambda \neq 0$, $\operatorname{rg}(\lambda u) = \operatorname{rg} u$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} s &\leq \operatorname{rg} p + \operatorname{rg}(q\sqrt{2}) + \operatorname{rg}(r\sqrt{3}) \\ &= \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q + \operatorname{rg} r. \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{rg} p + \sqrt{2} \operatorname{rg} q + \sqrt{3} \operatorname{rg} r = \operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q + \operatorname{rg} r$, d'où $(\sqrt{2} - 1) \operatorname{rg} q + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{rg} r = 0$. Il s'agit d'une somme de réels positifs donc $\operatorname{rg} q = \operatorname{rg} r = 0$.

Finalement, s est un projecteur si et seulement si $q = r = 0$.

166 ————— **TPE**

1. Bien-sûr, $L \subset \mathfrak{L}(E, F)$ et il n'est pas vide puisqu'il contient l'application linéaire nulle.

Soient u et v dans L et λ un scalaire. Soit $x \in G$. On a $u(x) = 0$, car $G \subset \operatorname{Ker}(u)$; de même, $v(x) = 0$. Alors, $\lambda u(x) + v(x) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker}(\lambda u + v)$, donc $G \subset \operatorname{Ker}(\lambda u + v)$, d'où enfin $\lambda u + v \in L$.

Ainsi, L est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}(E, F)$. Il est de dimension finie car E et F le sont.

2. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de G . On la complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E . Soit $u \in L$. Comme $G \subset \operatorname{Ker}(u)$, l'image des vecteurs e_1, \dots, e_p est fixée, c'est 0. L'application u est alors entièrement déterminée par l'image des $n - p$ vecteurs restants. Alors,

$$\dim(L) = (\dim(E) - \dim(G)) \dim(F).$$

167 ————— **MP**

D'une part,

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{2k}{n})^3}.$$

D'autre part, d'après les sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{2k}{n})^3} = \int_0^1 \frac{dt}{(1 + 2t)^3} = \frac{2}{9},$$

donc $u_n \sim \frac{2}{9n^2}$.

168 ————— **CCINP25**

RAYON DE CONVERGENCE. Posons $a_n = n^{(-1)^n}$. On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq a_n \leq n$. Posons $b_n = \frac{1}{n}$ et $c_n = n$: $0 \leq b_n \leq a_n \leq c_n$. Notons R_a, R_b, R_c les rayons de convergence respectif de $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$: on a donc $R_b \geq R_a \geq R_c$. Or $R_b = R_c = 1$, car pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt, \\ \text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right), \end{aligned}$$

puisque'il est permis d'intégrer et de dériver terme à terme la somme d'une série entière. Donc $R_a = 1$.

SOMME. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \right) + \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} dt \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) + \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \\ &= \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

169 ————— **CS**

DOMAINE D'ÉTUDE. La fonction f est définie sur $D = [-2, 2] \times \mathbb{R}$. En outre, f est paire en x , 2π -périodique et paire en y , on l'étudie donc sur $[0, 2] \times [0, \pi]$.

POINTS CRITIQUES. Les extrémums éventuels sont des points critiques, mais seulement sur un ouvert. Il faut donc se placer sur l'intérieur de D , ou encore sur $[0, 2[\times [0, \pi]$, qui n'est pas un ouvert mais qui est entièrement dans l'intérieur de D . Sur cet ensemble, f est de classe \mathcal{C}^2 , comme composée de fonctions qui le sont. On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \cos y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{4-x^2} \sin(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 0 \\ x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) = 0 \end{cases} \\ & \text{ou} \begin{cases} y = \pi \\ x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = \pi \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = \pi \\ x = \sqrt{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(0, \pi)$ et $(\sqrt{3}, \pi)$.

NATURE DES POINTS CRITIQUES. La hessienne de f en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, dont le spectre est dans \mathbb{R}_+^* donc $(0, 0)$ est un minimum local de f .

La hessienne de f en $(0, \pi)$ est $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont de signes contraires, donc $(0, \pi)$ n'est pas un extrémum local de f .

La hessienne de f en $(\sqrt{3}, \pi)$ est $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dont le spectre est dans \mathbb{R}_-^* donc $(\sqrt{3}, \pi)$ est un maximum local de f .

ÉTUDE DES BORDS. Considérons maintenant les couples $(2, y)$ pour $y \in [0, \pi]$. Pour x au voisinage de 2, on a

$$f(x, y) = 2 - 2\sqrt{2-x} \cos y - 2(x-2) + o(x-2).$$

Cela signifie que les couples $(2, y)$ sont des maximums locaux si $\cos y > 0$, c'est-à-dire $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et des minimums locaux si $\cos y < 0$ c'est-à-dire $y \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$; et que le couple $(2, \frac{\pi}{2})$ n'est pas un extrémum.

170 ————— **MP**

Voici deux résolutions complètement différentes.

PREMIÈRE MÉTHODE. Pour $n = 1$, c'est évidemment vrai. On suppose donc $n \geq 2$. Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, posons $u_k = x_k/x_{k+1}$ et $p_n = \prod_{k=1}^{n-1} u_k$. Alors $x_n/x_1 = 1/p_n$. Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ u = (u_1, \dots, u_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n-1} u_k + \frac{1}{p_n}. \end{array} \right.$$

Il s'agit de prouver que la fonction f admet n comme minimum global.

L'ensemble de définition de f étant un ouvert, dans un premier temps on cherche les points critiques de f . Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = 0 \iff 1 - \frac{1}{u_i p_n} = 0 \iff u_i = \frac{1}{p_n}.$$

Il s'ensuit que les u_i sont tous égaux et valent u_1 , donc $u_1 = 1/u_1^{n-1}$ et $u_1 = 1$. Finalement le seul point critique de f est $a = (1, \dots, 1)$.

Posons $H = H_f(a)$. Pour tout $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(u) = \frac{2}{u_i^2 p_n} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u) = \frac{1}{u_i u_j p_n}$$

donc

$$H = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}.$$

Écrivons $H = I_n + J$ où J la matrice remplie de 1. On voit que $H - I_n = J$ est de rang exactement 1, donc 1 est valeur propre d'ordre $n-1$ de H . De plus, comme la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, si λ est l'autre valeur propre de H , on a $\text{Tr}(H) = 2n = n-1 + \lambda$, d'où $\lambda = n+1$. Alors $\text{Sp}(H) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ce qui entraîne que a est un minimum local de f . Comme c'est le seul extrémum puisque l'on est sur un ouvert, c'est donc un minimum global.

Finalement, pour tout u , $f(u) \geq n$. On en tire l'inégalité de l'énoncé.

DEUXIÈME MÉTHODE. Posons $y_i = x_i/x_{i+1}$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $y_n = x_n/x_1$. Alors, le produit des y_i vaut 1 et

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} &\geq n \\ \iff \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} &\geq \sqrt[n]{y_1 \dots y_n}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité dit que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique, ce qui est toujours vrai, et que l'on peut déduire de la concavité du logarithme. Donc l'inégalité du départ est vraie.

171 ————— **EIVP17**

Considérons l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire usuel $(P|Q) = \int_0^1 PQ$. Alors la borne inférieure cherchée est le carré de la distance de X^2 à $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Plutôt que de chercher une base orthonormée de F , cherchons son orthogonal. En effet, puisque F est un hyperplan de E , F^\perp est une droite $\mathbb{R}N$ où N est normal à F .

Le polynôme N ne peut pas être de degré inférieur ou égal à 1, sinon il serait dans F . Choisissons

$$N = X^2 + pX + q.$$

Il est orthogonal à la base $(1, X)$ de F , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (1|N) = 0 & \text{ donc } \frac{1}{3} + \frac{1}{2}p + q = 0; \\ (X|N) = 0 & \text{ donc } \frac{1}{4} + \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q = 0. \end{aligned}$$

Alors $p = -1$, $q = \frac{1}{6}$ et $N = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

L'intérêt de ce choix est que l'on voit immédiatement que $X^2 = N + X - \frac{1}{6}$, où $X - \frac{1}{6} \in F$. Donc le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}N$ est N et le carré de la distance de X^2 à F est $\|N\|^2 = \frac{1}{180}$. En outre, cette borne inférieure est atteinte pour $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$.

172 ————— **CCP**

Comme $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n^\alpha = 0$. Donc, en faisant un développement limité, on a

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + r_n \end{aligned}$$

où $r_n \sim -1/(2n^{2\alpha})$. D'une part, la suite $(1/n^\alpha)$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n/n^\alpha$ converge. D'autre part, $\sum 1/n^{2\alpha}$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha > \frac{1}{2}$, donc il en est de même de $\sum r_n$. Alors, la série initiale converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

173 ————— **ENS**

D'après le théorème des sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

Commentaire. L'énoncé ne précise pas si p est entier naturel ou pas. Si oui, la résolution est terminée. Sinon, c'est toujours valide pour $p \in \mathbb{R}_+$ car la fonction $t \mapsto t^p$ est bien continue sur $[0, 1]$. Et si $p < 0$, il vaut mieux penser à une comparaison série-intégrale : à vous de jouer.

174 ————— **AM**

Scindons la série entière en ses parties paire et impaire, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 . Comme $a_{2p+2} = \alpha a_{2p+1} = \alpha\beta a_{2p}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left| \frac{a_{2p+2} z^{2p+2}}{a_{2p} z^{2p}} \right| = |\alpha\beta| |z|^2$$

et $R_1 = 1/\sqrt{|\alpha\beta|}$. De même, $R_2 = 1/\sqrt{|\alpha\beta|}$. Comme la série du départ est la somme des deux, son rayon de convergence vérifie $R \geq R_1$. Mais $R_1 = R_2$, donc on ne peut pas encore conclure à l'égalité. Cependant, si $|z| > R_1$, $\sum a_{2p} z^{2p}$ diverge grossièrement, autrement dit la suite $(a_{2p} z^{2p})$ ne tend pas vers 0. Cette suite est extraite de la suite $(a_n z^n)$, qui ne tend donc pas vers 0 non plus. Alors, $R = R_1 = R_2 = 1/\sqrt{|\alpha\beta|}$.

175 ————— **MT**

RAYON DE CONVERGENCE. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$, de sorte que $a_{n+1} = f(a_n)$. Comme $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$, la suite (a_n) est bien définie. De plus, pour $x > 0$, $f(x) < x$, donc $a_{n+1} < a_n$ et la suite (a_n) décroît. Comme elle est positive, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. Par continuité de f , à la limite on a $\ell = f(\ell)$, donc $\ell = 0$. Alors, on peut écrire $a_{n+1} = a_n + o(a_n)$, ou encore $a_{n+1}/a_n = 1 + o(1)$ donc $\lim |a_{n+1}/a_n| = 1$ et d'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.

ÉTUDE AUX BORDS. Comme (a_n) tend vers 0 en décroissant, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n a_n$ converge.

De plus, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} a_n^2 + o(a_n^2)$ donc $\ln(a_{n+1}/a_n) \sim -\frac{1}{2} a_n$. Mais $\lim a_n = 0$ donc $\lim \ln(a_n) = -\infty$. Or la suite $(\ln(a_n))$ est de même nature que la série de terme général $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln(a_{n+1}/a_n)$, donc $\sum a_n$ diverge.

ENSEMBLE DE DÉFINITION. Finalement, la somme est définie sur $[-1, 1[$.

176 ————— **AM**

1. Étudions la continuité à l'aide des coordonnées polaires :

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho(\cos^3 \theta - \sin^3 \theta).$$

On voit que $f(x, y)$ tend vers $0 = f(0, 0)$ quand ρ tend vers 0, donc f est continue en $(0, 0)$. Bien-sûr, d'après les théorèmes généraux, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Étudions l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$. Par définition,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1. \end{aligned}$$

Ensuite, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les dérivées partielles de f sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2x y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{y^4 + 3x^2 y^2 + 2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Toujours avec les coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \cos^4 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin^3 \theta, \end{aligned}$$

et cette expression n'admet pas de limite quand ρ tend vers 0. Ainsi, f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

177 ————— **MP17**

GÉNÉRALITÉS. Dire que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 signifie que les quatre dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

sont définies et continues sur \mathbb{R}^2 . Donc il est déjà nécessaire que les deux dérivées partielles premières le soient.

Par opérations usuelles, f est clairement de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus, en dérivant comme un produit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} - 2x^2 y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x y^2}{x^2 + y^2} - 2x y^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

DÉRIVÉES PARTIELLES PREMIÈRES EN $(0, 0)$.

Par définition, si elle existe,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0}.$$

Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0,$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur \mathbb{R}^2 .

Sur le même principe, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est aussi définie sur \mathbb{R}^2 .

DÉRIVÉES PARTIELLES SECONDES CROISÉES EN $(0,0)$.
Si elles existent, ces dérivées sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right).$$

Or, pour $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = 1,$$

et pour $y \neq 0$,

$$\frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right) = -1.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Mais ces dérivées partielles sont distinctes, donc par contraposition du théorème de Schwarz, f n'est pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

178 ————— **MP**

Constatons que $A^2 = 2A - I_3$. Cela signifie le polynôme $(X - 1)^2$ est annulateur de A .

PUISSANCES POSITIVES. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après la formule de Taylor appliquée en 1,

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k,$$

où la somme est finie. Évaluons cette égalité en A :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (A - I_3)^k \\ &= P(1)I_3 + P'(1)(A - I_3), \end{aligned}$$

car pour tout $k \geq 2$, $(A - I_3)^k = 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= 1^n I_3 + n 1^{n-1} (A - I_3) \\ &= (1 - n)I_3 + nA \\ &= \begin{pmatrix} 1 - n & n & n \\ -2n & 2n + 1 & 2n \\ n & -n & 1 - n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

PUISSANCES NÉGATIVES. D'abord, A est inversible car $A(2I_3 - A) = I_3$, et $A^{-1} = 2I_3 - A$. On retrouve l'expression précédente avec $n = -1$. Alors, on imagine que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{-n} = (1 + n)I_3 - nA.$$

Prouvons-le. On a

$$\begin{aligned} A^n((1 + n)I_3 - nA) &= (I_3 + n(A - I_3))(I_3 - n(A - I_3)) \\ &= I_3 - n^2(A - I_3)^2 = I_3, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'expression annoncée.

CONCLUSION. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 - n & n & n \\ -2n & 2n + 1 & 2n \\ n & -n & 1 - n \end{pmatrix}.$$

179 ————— **CCP**

1. Soit $M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$ la matrice de Φ dans la base canonique de E . Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(X + 1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i,$$

donc pour $0 \leq i \leq j \leq n$, $m_{ij} = \binom{j}{i}$, et si $j < i$, $m_{ij} = 0$. Ainsi, M est triangulaire supérieure, et ses colonnes sont les lignes du triangle de Pascal.

2. Φ est inversible, car M n'a que des 1 sur la diagonale, donc $\det(M) \neq 0$. De plus, sa réciproque est clairement définie par $\Phi^{-1}(P)(X) = P(X - 1)$.

180 ————— **CCP**

EXISTENCE. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale converge car la fonction $t \mapsto \cos(xt)/(e^t + 1)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ : en effet, pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{|\cos(xt)|}{e^t + 1} \leq e^{-t}.$$

CALCUL FORMEL. Voici un calcul formel. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t(1 + e^{-t})} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} dt \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{ixt - t - nt} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-t(n+1-ix)} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - ix} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + x^2}. \end{aligned}$$

JUSTIFICATION. Et maintenant, justifions le calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $f_n : t \mapsto (-1)^n e^{-t(n+1-ix)}$. Il s'agit de prouver que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n.$$

Mais

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)} dt = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ diverge et le théorème auquel on pense ne s'applique pas.

Changeons de tactique. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $S_N = \sum_{n=0}^N f_n$. Alors les S_N sont continues sur \mathbb{R}_+ , (S_N) converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers

$$S : t \mapsto \frac{e^{ixt} e^{-t}}{1 + e^{-t}}$$

qui est continue sur \mathbb{R}_+^* . Enfin, on a la domination suivante : pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$,

$$|S_N(t)| = \left| \frac{e^{-t(1-ix)} (1 - (-1)^{N+1} e^{-(N+1)t})}{1 + e^{-t}} \right| \leq 2e^{-t},$$

où $t \mapsto e^{-t}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* . Alors, le théorème de convergence dominée s'applique : S est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (ce que l'on savait déjà), et l'on peut écrire

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} S_N = \int_{\mathbb{R}_+} S.$$

Autrement dit, comme

$$\int_{\mathbb{R}_+} S_N = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n=0}^N f_n = \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} f_n,$$

on obtient ce que l'on voulait :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

181 ————— **MT**

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\Phi(A) = 0$,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Phi(M) &= \Phi(\text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A) \\ &= \text{Tr}(A)\Phi(M) - \text{Tr}(M)\Phi(A) \\ &= \text{Tr}(A)\Phi(M), \end{aligned}$$

donc $\Phi^2 = \text{Tr}(A)\Phi$ et le polynôme $P = X(X - \text{Tr}(A))$ est annulateur de Φ . Ce polynôme est scindé à racines simples car $\text{Tr}(A) \neq 0$, donc Φ est diagonalisable.

2. De plus, les valeurs propres de Φ sont parmi les racines de $P : \text{Sp}(\Phi) \subset \{0, \text{Tr}(A)\}$.

On a vu que $\Phi(A) = 0$. Comme $A \neq 0$, c'est un vecteur propre de Φ , donc $0 \in \text{Sp}(\Phi)$ et $\mathbb{R}A \subset E_0(\Phi)$.

De même, si $\text{Tr}(M) = 0$ alors $\Phi(M) = \text{Tr}(A)M$, donc $\text{Tr}(A) \in \text{Sp}(\Phi)$ et $\text{Ker Tr} \subset E_{\text{Tr}(A)}(\Phi)$.

Ainsi, $\text{Sp}(\Phi) = \{0, \text{Tr}(A)\}$.

Enfin, comme $\text{Tr}(A) \neq 0$, $A \notin \text{Ker Tr}$, et comme Ker Tr est un hyperplan de E , $E = \mathbb{R}A \oplus \text{Ker Tr}$. Mais par ailleurs, $E = E_0(\Phi) \oplus E_{\text{Tr}(A)}(\Phi)$. Donc les inclusions précédentes sont des égalités : $E_0(\Phi) = \mathbb{R}A$ et $E_{\text{Tr}(A)}(\Phi) = \text{Ker Tr}$.

182 ————— **CCP**

L'idée est de décomposer e^{-t^2} en somme d'une série et de permuter avec l'intégrale. Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

En notant $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{2n}/n!$, $\|f_n\|_{\infty}^{[0,1]} = 1/n!$ et $\sum 1/n!$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$. Comme les f_n sont continues sur $[0, 1]$, on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t^2} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}. \end{aligned}$$

L'intégrale est donc approchée par les sommes partielles S_n de cette série alternée. En vertu du théorème spécial des séries alternées, le reste est majoré comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} = M_n.$$

Comme on veut une valeur approchée à 10^{-3} près, il suffit de choisir n tel que ce majorant soit inférieur à 10^{-3} . En calculant les premiers termes, on trouve que

$$M_3 = \frac{1}{216}, \quad M_4 = \frac{1}{1320} \leq 10^{-3}$$

donc il suffit de prendre $n = 4$. Ainsi, à 10^{-3} près,

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt \approx S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,747.$$

En outre, comme la somme est encadrée par les sommes partielles d'indices pairs et impairs, cette approximation est à 10^{-3} près par excès.

183 ————— **CCP**

CONVERGENCE SIMPLE. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

Soit $x \in]0, 1]$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, car le sinus est borné et l'exposant tend vers $-\infty$.

Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.

CONVERGENCE UNIFORME. On voit clairement que $f_n(1/n^2) - 0 = e^{-1} \sin 1$ ne tend pas vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

CONVERGENCE UNIFORME SUR TOUT SEGMENT $[a, 1]$ OÙ $a > 0$. Soit $a > 0$: pour tout $x \in [a, 1]$, $|f_n(x)| \leq e^{-n^2 a}$ et ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, 1]$ où $a > 0$.

184 ————— **CCP**

1. Comme la trace est linéaire, f est un endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in E$. On a

$$\begin{aligned} f^2(M) &= f(2 \operatorname{Tr}(M) A) = 2 \operatorname{Tr}(M) f(A) \\ &= 4 \operatorname{Tr}(M) \operatorname{Tr}(A) A = 2 \operatorname{Tr}(A) f(M). \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme

$$X^2 - 2 \operatorname{Tr}(A) X = X(X - 2 \operatorname{Tr}(A))$$

est annulateur de f . Comme $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$, ce polynôme est scindé à racines simples et f est diagonalisable.

185 ————— **CCP**

1. Soient $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$ tels que $u \circ v(x) = \lambda x$. Alors, $v \circ u \circ v(x) = \lambda v(x)$. Or $v(x) \neq 0$, sinon on aurait $u \circ v(x) = 0$. Cela entraîne que $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ . En particulier, λ est valeur propre de $v \circ u$.

2. Supposons E de dimension finie et 0 valeur propre de $u \circ v$. Alors $\det(u \circ v) = 0$ donc

$$\begin{aligned} \det(v \circ u) &= \det(v) \det(u) \\ &= \det(u) \det(v) = \det(u \circ v) = 0 \end{aligned}$$

et 0 est valeur propre de $v \circ u$.

3. Soit $P \in E : u \circ v(P) = P$ et $v \circ u(P) = P - P(0)$ donc $\operatorname{Ker}(u \circ v) = \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$. Il s'ensuit que $0 \notin \operatorname{Sp}(u \circ v)$ mais $0 \in \operatorname{Sp}(v \circ u)$.

186 ————— **TPE**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction

$$h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t^x}{e^t - 1}.$$

Par opérations usuelles, elle est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $h(t) \ll_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/2}$ et $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , donc h l'est sur $[1, +\infty[$.

Enfin, pour tout $t \in]0, 1]$, $h(t) \sim_{t \rightarrow 0} 1/t^{1-x}$. Or, $t \mapsto 1/t^{1-x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$. Donc h est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.

Finalement, f est définie sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit $x > 0$. Voici un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

CALCUL FORMEL.

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \\ (1) \quad &= \int_0^{+\infty} t^x \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n dt \\ (2) \quad &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^x e^{-nt} dt \\ (3) \quad &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du \end{aligned}$$

$$(4) \quad = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \Gamma(x+1)$$

$$(5) \quad = \Gamma(x+1) \zeta(x+1).$$

JUSTIFICATIONS. Voici les justifications des égalités précédentes.

(1) Pour tout $t > 0$, $0 < e^{-t} < 1$ donc la série géométrique $\sum_{n \geq 1} e^{-nt}$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

(2) Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n : t \mapsto t^x e^{-nt}$ est positive et continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, $f_n(t) \ll_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/2}$ et $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , donc f_n l'est aussi. D'après (1), $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme est h , qui est continue sur I . Pour valider la convergence de $\sum \int_I |f_n|$, faisons le calcul qui valide (3).

(3) Le changement de variable $u = nt$ est bijectif et \mathcal{C}^1 de I dans I , et comme les f_n sont intégrables sur I , on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} f_1(u) du.$$

FIN DU (2). Ainsi, $\int_I |f_n| = C/n^{x+1}$, où C ne dépend pas de n . Or $x > 0$ donc $x+1 > 1$ et $\sum 1/n^{x+1}$ converge. Alors $\sum \int_I |f_n|$ converge, et l'on peut permuter : (2) est justifiée.

(4) Comme $x+1 > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^{(x+1)-1} e^{-u} du.$$

(5) Par construction, ζ est définie sur $]1, +\infty[$, donc $\zeta(x+1)$ a un sens.

187 ————— **MT**

1. Une suite périodique est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$. Alors R est supérieur au rayon de convergence de $\sum M z^n$, qui vaut $1 : R \geq 1$.

De plus, comme (a_n) est périodique et non nulle, elle prend une même valeur non nulle une infinité de fois, donc elle ne tend pas vers 0. Alors $\sum a_n$ diverge et $R \leq 1$.

Finalement, $R = 1$.

2. Soit $p \geq 1$ la période de (a_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+p} = a_n$. Pour tout $z \in D(0, 1)$, notons

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n.$$

En posant $n = m + p$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m+p} z^{m+p} = z^p \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m = z^p S(z).$$

$$\text{Ainsi} \quad S(z) = \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n + z^p S(z),$$

$$\text{d'où} \quad S(z) = \frac{\sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n}{1 - z^p}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n R^n e^{in\theta}| = |a_n|$. Or (a_n) ne tend pas vers 0, donc $\sum a_n R^n e^{in\theta}$ diverge grossièrement.

188 ————— CCP

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* . En outre, $f_n(x) \sim_{x \rightarrow 0} 1/n$ donc f_n est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. De plus, $f_n(x) \ll_{x \rightarrow +\infty} 1/x^2$ et $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f_n aussi. Finalement, f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = n f_n$. Pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 1/(1+x^2)$, donc la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers la fonction $g : x \mapsto 1/(1+x^2)$. Les fonctions g_n et g sont continues sur \mathbb{R}_+^* . Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$,

$$|g_n(x)| = \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} g(x) \leq g(x).$$

Or la fonction g est clairement intégrable sur \mathbb{R}_+^* , donc elle constitue une domination valide. Alors d'après le théorème de convergence dominée, les fonctions g_n et g sont intégrables sur \mathbb{R}_+^* (on le savait déjà), la suite (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

189 ————— CCP16

Clairement, $A^\top A = I_3$ et $A \in O_3(\mathbb{R})$. De plus, sans difficulté,

$$E_1(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'endomorphisme f associé à A est une rotation autour de cette droite, d'un certain angle θ . Or $\text{Tr } A = 2 \cos \theta + 1$ donc $\theta = \text{Arccos}(-\frac{5}{6})$.

190 ————— MP

1. Posons $E = \mathbb{R}_n[X]$. En notant $d : P \mapsto P'$ la dérivation sur E , on voit que $f = \text{id}_E - d$, donc c'est bien un endomorphisme de E .

PREMIÈRE FAÇON. Dans la base canonique de E , f a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & -2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ (0) & & 1 & -n \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

laquelle est de rang $n+1$ donc f est bijective.

DEUXIÈME FAÇON. La dérivée $(n+1)$ -ième d'un polynôme de E est nulle. Donc $d^{n+1} = 0$ et $(\text{id}_E - f)^{n+1} = 0$. Ainsi

$$\text{id}_E + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-f)^k = 0$$

$$\text{et } f \circ \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-f)^{k-1} \right) = \text{id}_E.$$

Il s'ensuit que f est surjectif, donc bijectif puisque E est de dimension finie.

2. Alors, si $P - P' = Q$,

$$P = f^{-1}(Q) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-f)^{k-1}(Q).$$

191 ————— CCP

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $D(x) = \det(A + xJ)$. Ce déterminant comporte des $a+x$ sur la diagonale, des $b+x$ au dessus et des $c+x$ au dessous :

$$D(x) = \begin{vmatrix} a+x & & (b+x) \\ & \ddots & \\ (c+x) & & a+x \end{vmatrix}.$$

Dans $D(x)$, faisons les opérations suivantes, dans l'ordre où elles apparaissent :

$$C_j \leftarrow C_j - C_1, \quad j \in \llbracket 2, n \rrbracket,$$

$$L_i \leftarrow L_i - L_1, \quad i \in \llbracket 2, n \rrbracket.$$

On élimine ainsi le x de tous les termes, sauf le premier, $a+x$, qui ne change pas. Alors $D(x)$ est clairement un polynôme en x de degré 1 : il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout x , $D(x) = \alpha x + \beta$.

2. Évaluons D en $-b$ et $-c$.

$$D(-b) = \begin{vmatrix} a-b & & (0) \\ & \ddots & \\ (c-b) & & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^n = -\alpha b + \beta,$$

$$D(-c) = \begin{vmatrix} a-c & & (b-c) \\ & \ddots & \\ (0) & & a-c \end{vmatrix} = (a-c)^n = -\alpha c + \beta.$$

Ainsi, sachant que $b \neq c$,

$$\begin{aligned} \det(A) &= D(0) = \beta \\ &= \frac{bD(-c) - cD(-b)}{b-c} \\ &= \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}. \end{aligned}$$

192 ————— CCP

1. La matrice

$$A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3 et $3 < n$ car $n \geq 4$. Ainsi, $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

2. De plus, le sous-espace propre associé est $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_n)$ et d'après le théorème du rang, $\dim(E_1(A)) = n - \text{rg}(A - I_n) = n - 3$.

Les colonnes C_2 à C_{n-1} de $A - I_n$ sont égales, donc pour tout $j \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket$, $C_j - C_{j-1} = 0$, donc

$$\text{ligne } j \rightarrow \begin{pmatrix} (0) \\ -1 \\ 1 \\ (0) \end{pmatrix} \in E_1(A).$$

Il y a $n - 3$ tels vecteurs, qui sont manifestement indépendants, donc

$$E_1(A) = \bigoplus_{j=3}^{n-1} \mathbb{R} \begin{pmatrix} (0) \\ -1 \\ 1 \\ (0) \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } j$$

3. Sur le même principe, on voit que $\text{rg}(A) = n - 1$, donc $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\dim(E_0(A)) = 1$. En outre, les deux colonnes extrêmes de A sont égales, donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (0) \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0(A) \text{ et } E_0(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit alors $\lambda \notin \{0, 1\}$ une autre valeur propre éventuelle de A , et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$\begin{aligned} X \in E_{\lambda}(A) \\ \iff \begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k = \lambda x_1, \\ x_1 + x_n = (\lambda - 1)x_i, \quad i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \\ \sum_{k=1}^n x_k = \lambda x_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$,

$$\begin{aligned} X \in E_{\lambda}(A) \\ \iff \begin{cases} x_1 = x_n, \quad x_2 = \dots = x_{n-1}, \\ \sum_{k=1}^n x_k = \lambda x_1, \\ x_1 + x_n = (\lambda - 1)x_2, \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x_1 = x_n, \quad x_2 = \dots = x_{n-1}, \\ 2x_1 + (n-2)x_2 = \lambda x_1, \\ 2x_1 = (\lambda - 1)x_2, \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x_1 = x_n, \quad x_2 = \dots = x_{n-1}, \\ 2x_1 = (\lambda - 1)x_2, \\ (\lambda + n - 3)x_2 = \lambda x_1, \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x_1 = x_n, \quad x_2 = \dots = x_{n-1}, \\ 2x_1 = (\lambda - 1)x_2, \\ 2(\lambda + n - 3)x_2 = \lambda(\lambda - 1)x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $x_2 = 0$, tous les x_i sont nuls et $X = 0$, ce qui n'est pas, donc $x_2 \neq 0$. Alors la dernière équation devient $\lambda^2 - 3\lambda - 2(n-3) = 0$, dont les racines sont

$$\lambda_{\varepsilon} = \frac{3 + \varepsilon \sqrt{8n - 15}}{2} \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

En passant, comme $n \geq 4$, $8n - 15 \geq 0$. Les espaces propres correspondants sont

$$E_{\lambda_{\varepsilon}}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \lambda_{\varepsilon} - 1 \\ (2) \\ \lambda_{\varepsilon} - 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Commentaire. A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Alors certaines étapes de la résolution auraient pu être abrégées.

193

ENS

NOTATIONS. Pour alléger les écritures, utilisons des notations fonctionnelles plutôt que les évaluations des fonctions en t . Ce ne sera pas toujours possible.

1. Comme $X' = AX - XA$, on voit que $\text{Tr}(X') = 0$.

Par ailleurs, pour deux réels t_0 fixé et $t \neq t_0$,

$$\frac{\text{Tr}(X(t)) - \text{Tr}(X(t_0))}{t - t_0} = \text{Tr} \left(\frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} \right).$$

D'une part, puisque X est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} = X'(t_0).$$

D'autre part, $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc la trace y est continue puisqu'elle est linéaire. Alors, par composition des limites,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\text{Tr}(X(t)) - \text{Tr}(X(t_0))}{t - t_0} = \text{Tr}(X'(t_0)) = 0.$$

Cela signifie que $\text{Tr}(X)$ est dérivable sur \mathbb{R} et que $\text{Tr}(X)' = \text{Tr}(X') = 0$. Donc $\text{Tr}(X)$ est constante.

On a

$$\begin{aligned} (X^2)' &= X X' + X' X \\ &= X (AX - XA) + (AX - XA) X \\ &= X^2 A - A X^2. \end{aligned}$$

Sur le même principe que précédemment, il s'ensuit que $\text{Tr}(X^2)$ est constante.

Commentaire. Attention, $(X^2)'$ ne vaut peut-être pas $2X X'$, car X et X' ne commutent peut-être pas.

Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(X^k)' = A X^k - X^k A.$$

Commentaire. L'expression est encore valide en $k = 0$.

Comme plus haut, on en tire que $\text{Tr}(X^k)$ est constante.

2. Notons λ et μ les valeurs propres complexes de X , non nécessairement distinctes. Comme χ_X est scindé sur \mathbb{C} , on a donc

$$\text{Tr}(X) = \lambda + \mu \text{ et } \text{Tr}(X^2) = \lambda^2 + \mu^2.$$

Notons $s = \lambda + \mu$ et $p = \lambda\mu$. Alors

$$s^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu = \lambda^2 + \mu^2 + 2p,$$

donc

$$\text{Tr}(X) = s \text{ et } \text{Tr}(X^2) = s^2 - 2p.$$

Ainsi,

$$s = \text{Tr}(X) \text{ et } p = \frac{1}{2}(\text{Tr}(X)^2 - \text{Tr}(X^2)).$$

Comme $\text{Tr}(X)$ et $\text{Tr}(X^2)$ sont constantes, cela entraîne que s et p le sont, donc que λ et μ aussi, car ce sont les racines de

$$\chi_X(x) = x^2 - sx + p.$$

3.

194 ————— **CCP**

Nommons u_n le terme général.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt[k]{k} = \exp(\ln k/k)$. Un étude rapide montre que la fonction $x \mapsto \ln x/x$ est maximale en e , donc $\sqrt[k]{k}$ est majorée par $a = e^{1/e}$. Alors $u_n \geq 1/(na)$ et la série diverge.

195 ————— **CCP**

Comme $AA^\top = A^\top A$, $(AA^\top)^p = A^p(A^\top)^p = 0$. Or AA^\top est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Mais 0 est la seule valeur propre de AA^\top , car c'est la seule racine de X^p , qui est annulateur de AA^\top . Donc $AA^\top = 0$. Alors $\text{Tr}(AA^\top) = 0$. On reconnaît le carré de la norme euclidienne usuelle de A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $A = 0$.

196 ————— **CCP**

1. D'après le cours, si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge absolument aussi. De plus, ℓ^1 est clairement non vide. Donc c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

2. La seule difficulté par rapport aux normes usuelles définies sur \mathbb{R}^n , est de prouver que les trois normes sont bien définies.

La première l'est par nature, puisque ℓ^1 est l'ensemble des suites pour lesquelles la série converge absolument.

Soit $u \in \ell^1$. Comme $\sum |u_n|$ converge, la suite $(|u_n|)$ tend vers 0. Alors, à partir d'un certain rang, $u_n^2 \leq |u_n|$, donc $\sum u_n^2$ converge et $\|u\|_2$ est bien définie.

Enfin, nous venons de dire que $(|u_n|)$ tend vers 0, donc c'est une suite bornée : elle admet une borne supérieure et $\|u\|_\infty$ est bien définie.

Le reste des propriétés est une simple généralisation des normes vues en cours.

3. Considérons la suite u d'éléments de ℓ^1 dont les premiers termes sont les suites

$$\begin{aligned} u_0 &= (1, 0, \dots), \\ u_1 &= (1, 1, 0, \dots), \\ u_2 &= (1, 1, 1, 0, \dots), \dots \end{aligned}$$

Il s'agit d'une suite de suites : $u = (u_p)_{p \geq 0} \in (\ell^1)^\mathbb{N}$ où pour tout $p \geq 1$, u_p est la suite de ℓ^1 définie par

$$u_p = (\underbrace{1, \dots, 1}_{p+1 \text{ fois}}, 0, \dots),$$

ou encore $u_p = (u_{p,n})_{n \geq 0}$ avec

$$\forall n \geq 0, u_{p,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sans difficulté, pour tout $p \geq 0$,

$$\|u_p\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_{p,n}| = 1,$$

et

$$\|u_p\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{p,n}| = \sum_{n=0}^p 1 = p + 1.$$

Alors, il n'existe aucun $\alpha > 0$ tel que

$$\forall u \in \ell^1, \|u\|_1 \leq \alpha \|u\|_\infty.$$

Sinon, on aurait pour tout $p \geq 0$, $\|u_p\|_1 \leq \alpha \|u_p\|_\infty$, c'est-à-dire $p + 1 \leq \alpha$, ce qui n'est pas. Cela signifie que les normes 1 et ∞ ne sont pas équivalentes.

De même, pour tout $p \geq 0$, $\|u_p\|_2 = \sqrt{p+1}$, donc pour les mêmes raisons, les normes 2 et ∞ ne sont pas équivalentes.

Enfin, introduisons $v = (v_p)_{p \geq 0} \in (\ell^1)^\mathbb{N}$ définie par

$$\begin{aligned} v_0 &= (1, 0, \dots), \\ v_1 &= \left(1, \frac{1}{2}, 0, \dots\right), \\ v_2 &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \dots\right), \dots \end{aligned}$$

Alors

$$\|v_p\|_1 = \sum_{n=0}^p \frac{1}{n+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty,$$

tandis que

$$\|v_p\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^p \frac{1}{(n+1)^2}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Donc comme plus haut, les normes 1 et 2 ne sont pas équivalentes.

Commentaires.

La valeur connue de $\pi^2/6$ n'est pas à connaître :-)

J'imagine que l'examinateur avait prévu une indication (ou plusieurs)...

197 ————— **CCP**

Nommons M la matrice donnée.

ANALYSE. Supposons que A existe. Comme $A^2 = M$, M est un polynôme en A , donc M et A commutent et tout sous-espace propre de M est stable par A .

Clairement, $\text{Sp}_\mathbb{R}(M) = \{1, 2, 3\}$ et M est diagonalisable. Tout aussi clairement (hum!),

$$\begin{aligned} E_3(M) &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ E_1(M) &= \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, 2, 3)$ et

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme les sous-espaces propres de M sont des droites et qu'elles sont stables par A , ce sont aussi des droites propres de A . Du coup, A est aussi diagonalisable, et dans la même base que M . Autrement dit, il existe une matrice diagonale Δ telle que $A = P\Delta P^{-1}$. Ainsi, $\Delta^2 = D$ et $\Delta = \text{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3})$.

SYNTHÈSE. On vérifie sans peine que les matrices $P \text{diag}(\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}) P^{-1}$ conviennent.

198 ————— **CS**

1. Considérons une série réelle $\sum u_n$ absolument convergente. Alors, la suite (u_n) tend vers 0, donc à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq 1$ et $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$. Alors, par majoration, $\sum u_n^2$ converge.

2. Non, ça n'est plus vrai si la série $\sum u_n$ est seulement semi-convergente, comme on le voit en considérant la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

199 ————— **CS**

On a

$$\begin{aligned} u_n &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{n/2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{n/2}} \leq \frac{1}{2^{n/2}}. \end{aligned}$$

Or la série $\sum 1/2^{n/2}$ converge comme série géométrique de raison $1/\sqrt{2} \in [0, 1[$ donc $\sum u_n$ converge.

200 ————— **ENSEA**

On a

$$u_n = \exp(-\ln n \ln \ln n) = n^{-\ln \ln n} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}}.$$

Comme $\lim \ln \ln n = +\infty$, à partir d'un certain rang, $\ln \ln n \geq 2$ donc $u_n \leq 1/n^2$, donc $\sum u_n$ converge.

201 ————— **CCP**

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique χ_A est annulateur de A . Comme $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $0 \notin \text{Sp}(A)$, donc $\chi_A(0) \neq 0$. Alors, en notant

$$\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

on a $a_0 \neq 0$ et

$$0 = \chi_A(A) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^n a_k A^k,$$

d'où

$$A \left(\sum_{k=1}^n a_k A^{k-1} \right) = -a_0 I_n$$

et

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} A^k.$$

202 ————— **MT**

Nommons u l'endomorphisme canoniquement associé à M . Il s'agit de trouver une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de u est T .

Comme T est triangulaire, $\text{Sp}(T) = \{1_2, 2_2\}$, où chaque valeur propre est indexée par sa multiplicité. Donc on doit avoir $e_1 \in E_1(u)$ et $e_3 \in E_2(u)$.

Déterminons le polynôme caractéristique de M . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme M est triangulaire par blocs,

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= (-1)^4 \det(M - \lambda I_4) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 (1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Où l'on retrouve les valeurs propres attendues, ainsi que leur multiplicité.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

$$X \in E_1(M) \iff MX = X$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

Donc $E_1(M) = \mathbb{R}e_1$ où l'on choisit par exemple,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Avec la deuxième colonne de la matrice T , cherchons e_2 tel que $u(e_2) = 1e_1 + 1e_2$, ce que l'on interprète dans la base canonique par

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t = 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ z + t = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Choisissons par exemple

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Avec une démarche analogue, on peut choisir

$$e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par construction, la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est T . Donc M et T sont bien semblables. Plus précisément,

$$M = PTP^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

203 ————— IIE

Nommons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A . Nous cherchons une nouvelle base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u soit T . Alors on doit avoir $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$. En exprimant ces égalités vectorielles dans la base (e_1, e_2, e_3) , en notant x_i, y_i et z_i les coordonnées de ε_i dans la base canonique, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on résout

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

d'où $x_1 = 0$ et $4y_1 + z_1 = 0$, et l'on choisit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De même, on résout

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

d'où $x_2 = \frac{1}{2}$ et $4y_2 + z_2 = 0$, et l'on choisit

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on résout

$$A \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

d'où $x_3 + y_3 = 0$ et $2y_3 + z_3 = 0$, et l'on choisit

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut écrire $A = PTP^{-1}$ en posant

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que A et T sont bien semblables.

204 ————— CCP

D'une part, comme A est symétrique,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A^T B) = (A|B),$$

où l'on reconnaît le produit scalaire usuel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\text{Tr}(AB) \leq \|A\| \|B\|.$$

D'autre part, A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, ainsi que A^2 . En notant $(\lambda_i)_{i \in [1, n]}$ les valeurs propres de A , non nécessairement distinctes, les valeurs propres de A^2 sont $(\lambda_i^2)_{i \in [1, n]}$ et l'on a

$$\|A\|^2 = \text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Mais l'on sait que les valeurs propres de A sont positives, donc

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \underbrace{\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j}_{\geq 0} \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

c'est-à-dire $\|A\|^2 \leq (\text{Tr}(A))^2$, d'où $\|A\| \leq \text{Tr}(A)$ car

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0.$$

Le raisonnement est le même pour B . Donc

$$\text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A) \text{Tr}(B).$$

205 ————— CCINP25

1. Par opérations usuelles, la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En particulier, elle y est continue. En outre, en posant $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, (x, y) tend vers $(0, 0)$ si et seulement si ρ tend vers 0. De plus,

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = \rho |\cos \theta \sin \theta| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$. Cela signifie que f est continue en $(0, 0)$. Finalement, f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. On a déjà vu que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Par symétrie des rôles joués par x et y , étudions seulement la dérivabilité par rapport à x . Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Par ailleurs, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Enfin, en utilisant encore le changement de coordonnées polaires,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \sin^3 \theta.$$

Et l'on voit que si l'on choisit $\theta = \frac{\pi}{2}$, cette dérivée partielle vaut 1 et ne tend pas vers 0 quand ρ tend vers 0. Cela signifie que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ donc f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

206**TPE**

1. Comme $\deg(P) \geq 1$, $\lim_{+\infty} |P| = +\infty$, donc à partir d'un certain rang, $|P(n)| \geq 1$. Donc à partir de ce rang, $|P(n)a_n| \geq |a_n|$, donc $R' \leq R$.

2. La famille donnée est échelonnée donc libre. Elle contient $p+1$ vecteurs : c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Il s'ensuit que P se décompose dans cette base, sous la forme

$$P = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k \prod_{j=0}^{k-1} (X-j),$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Nous savons que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et que ses dérivées s'écrivent, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -R, R[$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \right) a_n x^{n-k}.$$

En particulier, les séries entières

$$\sum_{n \geq k} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \right) a_n x^{n-k}$$

ont toutes pour rayon de convergence R . Donc, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n)a_n = \alpha_0 a_n + \sum_{k=1}^p \alpha_k \left(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \right) a_n,$$

$\sum P(n)a_n x^n$ est somme de p séries entières de rayon de convergence R , donc $R' \geq R$. Ainsi, $R' = R$.

Commentaire. D'après le cours, on sait que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum P(n)a_n x^n$ ont même rayon de convergence. Mais ici, on demandait clairement de refaire la (une) preuve.

Enfin, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{k=1}^p \alpha_k \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \right) a_n x^n \\ &= \alpha_0 f(x) + \sum_{k=1}^p \left(\alpha_k x^k \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \right) a_n x^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^p \alpha_k x^k f^{(k)}(x). \end{aligned}$$

3. En écrivant

$$\frac{n^2 2^n + 2^n}{n!} = (n^2 + 1) \frac{2^n}{n!},$$

le rayon de convergence cherché est celui de $\sum \frac{2^n}{n!} x^n$, qui est $+\infty$, grâce à une application rapide de la règle de d'Alembert.

D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}.$$

D'autre part, $X^2 + 1 = X(X-1) + X + 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) \\ &= (4x^2 + 2x + 1) e^{2x}. \end{aligned}$$

207**MT**

Comme $[e^n] \sim e^n$, le rayon de convergence R cherché est le même que celui de la série entière $\sum e^n z^n$, laquelle est géométrique et converge si et seulement si $|ez| < 1$, c'est-à-dire $|z| < \frac{1}{e}$, donc $R = \frac{1}{e}$.

208**CCP**

1. Comme f et g commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre. Ainsi, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $E_\lambda(f)$ est stable par g , donc l'endomorphisme induit $g|_{E_\lambda(f)}$ est bien défini. De plus, il est diagonalisable, comme restriction de g qui l'est. Donc il existe une base de $E_\lambda(f)$ constituée de vecteurs propres pour $g|_{E_\lambda(f)}$, donc pour g . Mais ces vecteurs sont aussi propres pour f , car ils sont non nuls et dans $E_\lambda(f)$. Enfin, f étant diagonalisable, E est somme directe des $E_\lambda(f)$, donc en concaténant les bases précédentes, on obtient une base de E , constituée de vecteurs propres à la fois pour f et g .

2. Soit M symétrique complexe. Comme M est symétrique, $R(M)$ et $I(M)$ le sont aussi. Comme elles sont réelles, elles sont donc diagonalisables. Si elles commutent, elles admettent une base de vecteurs propres commune. Donc il existe deux matrices diagonales A et B et une matrice inversible P telles que $R(M) = PAP^{-1}$ et $I(M) = PBP^{-1}$. Alors

$$M = R(M) + iI(M) = P(A + iB)P^{-1},$$

où $A + iB$ est clairement diagonale, donc M est diagonalisable.

209**CCP**

1. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et que la famille $\mathcal{B} = (P_k)_{k \in [0, n]}$ contient $n+1$ polynômes, pour montrer qu'elle est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lambda_0(1-X)^n + \lambda_1 X(1-X)^{n-1} + \dots \\ & + \lambda_{n-1} X^{n-1}(1-X) + \lambda_n X^n = 0. \end{aligned}$$

En évaluant cette égalité en 1, on voit que $\lambda_n = 0$.
Alors

$$\begin{aligned} &\lambda_0(1-X)^n + \lambda_1X(1-X)^{n-1} + \dots \\ &+ \lambda_{n-2}X^{n-2}(1-X)^2 + \lambda_{n-1}X^{n-1}(1-X) = 0. \end{aligned}$$

En simplifiant par le polynôme $1-X$,

$$\begin{aligned} &\lambda_1(1-X)^{n-1} + \lambda_2X(1-X)^{n-2} + \dots \\ &+ \lambda_{n-2}X^{n-2}(1-X) + \lambda_{n-1}X^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

On voit que l'on est ramené à la même relation que (1), où l'on a remplacé n par $n-1$. Autrement dit, une récurrence naturelle s'enclenche. Pour la terminer, il reste à l'initialiser pour $n=0$. Il est clair que le polynôme $1 = X^0(1-X)^{0-0}$ est une base de $\mathbb{R}_0[X]$.

Finalement, l'initialisation est valide, l'hérédité a été validée précédemment, donc par récurrence sur n , la famille \mathcal{B} est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On voit que d'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= (X+1-X)^n = 1. \end{aligned}$$

En s'en inspirant, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} X^k &= X^k (X+1-X)^{n-k} \\ &= X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^j (1-X)^{n-k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^{k+j} (1-X)^{n-(k+j)} \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} X^i (1-X)^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} P_i, \end{aligned}$$

où l'on a posé $i = k+j$. Puisque \mathcal{B} est une base, cette écriture est unique et il s'agit de la décomposition de X^k dans la base \mathcal{B} .

210 ————— CCP

1. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme $X^\top AX$ est un nombre, on peut écrire

$$X^\top AX = (X^\top AX)^\top = X^\top A^\top X = -X^\top AX,$$

donc $X^\top AX = 0$.

2. Soit $X \in \text{Ker}(A+B)$: d'une part

$$X^\top (A+B)X = 0,$$

et d'autre part,

$$X^\top (A+B)X = X^\top AX + X^\top BX = X^\top BX.$$

Ainsi, $X^\top BX = 0$, ce qui entraîne que $X = 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $\text{Ker}(A+B) = \{0\}$ et $A+B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

211 ————— CCP

212 ————— CCP

1. La linéarité de u ne pose pas de problème, grâce à celle de φ . Soit $x \neq 0$ dans E . Sachant que $x_0 \neq 0$,

$$u(x) = x \iff \varphi(x) = 0.$$

Ainsi, $1 \in \text{Sp}(u)$ et $E_1(u) = \text{Ker } \varphi$.

213 ————— CCP

1. Voir le cours.

2. D'une part, comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. D'autre part, le polynôme $P = X^3 + 4X - 5$ est annulateur de A et avec la question 1, les valeurs propres de A sont parmi les racines de P . Mais

$$P = (X-1)(X^2 + X + 5),$$

où le trinôme ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Donc $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et $A = I_n$.

214 ————— CCP16

215 ————— CCP16

216 ————— CCP17

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Étudions la fonction

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x - nx.$$

Elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , et pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = e^x - n$. On en déduit facilement le tableau de variations suivant :

x	0	$\ln n$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$n(1 - \ln n)$	$+\infty$

D'après ce tableau, f_n admet une unique racine x_n sur $]0, \ln n[$ et une unique racine y_n sur $] \ln n, +\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $f_n(x_n) = 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. De plus, $0 < x_n < \ln n < \ln(n+1)$. Comme $e^{x_n} = nx_n$,

$$f_{n+1}(x_n) = e^{x_n} - (n+1)x_n = -x_n < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Or f_{n+1} décroît strictement sur $]0, \ln(n+1)[$, donc $x_n > x_{n+1}$. La suite (x_n) décroît strictement. Puisqu'elle est minorée, elle converge. Soit ℓ sa limite. Alors la suite (e^{x_n}) converge vers e^ℓ . Or $x_n = e^{x_n}/n$, donc $\lim x_n = 0$ et $\ell = 0$.

De même, $\ln n < \ln(n+1) < y_{n+1}$. Comme $e^{y_{n+1}} = (n+1)y_{n+1}$,

$$f_n(y_{n+1}) = e^{y_{n+1}} - ny_{n+1} = y_{n+1} > 0 = f_n(y_n).$$

Or f_n croît strictement sur $] \ln n, +\infty[$, donc $y_n < y_{n+1}$. La suite (y_n) croît strictement, et tend vers $+\infty$, car $\ln n < y_n$.

3. D'après ce qui précède, $x_n = e^{x_n}/n \sim 1/n$ car $x_n \rightarrow 0$ et $e^{x_n} \rightarrow 1$.

Posons $x_n = 1/n + u_n$. Alors

$$u_n = x_n - \frac{1}{n} = \frac{e^{x_n} - 1}{n} \sim \frac{x_n}{n} \sim \frac{1}{n^2},$$

car, successivement, $x_n \rightarrow 0$ donc $e^{x_n} - 1 \sim x_n$, puis $x_n \sim 1/n$. Ainsi,

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned} f_n((1+\varepsilon)\ln n) &= e^{(1+\varepsilon)\ln n} - n(1+\varepsilon)\ln n \\ &= n^{1+\varepsilon} - n(1+\varepsilon)\ln n \\ &= n(n^\varepsilon - (1+\varepsilon)\ln n). \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$, $n^\varepsilon \gg \ln n$, donc l'expression précédente tend vers $+\infty$, et à partir d'un certain rang, elle est strictement positive. Par croissance de f_n sur $[\ln n, +\infty[$, $(1+\varepsilon)\ln n > y_n$.

217 ————— CCP

1. La fonction $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \cos x$ est continue et croissante. De plus, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [0, \pi]$, il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = x f'(c)$, c'est-à-dire $f(x) = x \sin c \leq x$, car $c \in]0, \pi[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$ et la suite (u_n) décroît. Comme elle est minorée, elle converge. Nommons ℓ sa limite. Comme f est continue sur $[0, \pi]$, $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 0$. Ainsi, la suite (u_n) tend vers 0.

2. Si $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et $\sum u_n$ converge.

Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Sachant que $u_n \rightarrow 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 - \cos(u_n)}{u_n} \sim \frac{u_n^2/2}{u_n} = \frac{u_n}{2} \rightarrow 0 < 1,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

218 ————— CCP16

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Comme les X_i sont d'espérance finie, Y_n l'est aussi et par linéarité,

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

Donc d'après l'énoncé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = p.$$

Il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|E(Y_n) - p| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour un tel n ,

$$\begin{aligned} |Y_n - p| &= |Y_n - E(Y_n) + E(Y_n) - p| \\ &\leq |Y_n - E(Y_n)| + |E(Y_n) - p| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |Y_n - E(Y_n)| &\geq |Y_n - p| - |E(Y_n) - p| \\ &\geq |Y_n - p| - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|Y_n - p| > \varepsilon \iff |Y_n - E(Y_n)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Autrement dit, en termes d'évènements,

$$(|Y_n - p| > \varepsilon) = \left(|Y_n - E(Y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Donc

$$P(|Y_n - p| > \varepsilon) = P\left(|Y_n - E(Y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\left(|Y_n - E(Y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{V(Y_n)}{(\varepsilon/2)^2}.$$

Bien-sûr, les X_i admettent une variance, donc Y_n aussi. D'après les propriétés de la variance et sachant que les X_i sont indépendantes,

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{n} E(Y_n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(|Y_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{4}{n\varepsilon^2} E(Y_n).$$

Comme la suite $(E(Y_n))$ converge, elle est bornée. Donc ce majorant tend vers 0 avec n . Et comme une probabilité est positive, d'après le théorème d'encadrement on en tire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - p| > \varepsilon) = 0,$$

ce que l'on voulait.

219 ————— CCP

1. Par hypothèse, $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Or $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, donc $E(XY) = E(X)E(Y)$. D'une part,

$$E(X)E(Y) = pq = P(X=1)P(Y=1).$$

D'autre part, $XY = 0$ dès que $X = 0$ ou $Y = 0$, et $XY = 1$ seulement si $X = 1$ et $Y = 1$. Donc

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \cdot P(XY=0) + 1 \cdot P(XY=1) \\ &= 0 \cdot (P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) \\ &\quad + P(X=1, Y=0)) + 1 \cdot P(X=1, Y=1) \\ &= P(X=1, Y=1). \end{aligned}$$

D'où $P(X=1, Y=1) = P(X=1)Q(X=1)$.

2. Déterminons la loi conjointe du couple (X, Y) . Avec ce qui précède,

$$P(XY = 1) = P(X = 1, Y = 1) = pq.$$

En outre,

$$P(XY = 0) = 1 - P(XY = 1) = 1 - pq,$$

mais aussi

$$P(XY = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0).$$

Or, d'après la loi marginale de X ,

$$P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0) = 1 - p.$$

Donc

$$P(X = 1, Y = 0) = 1 - pq - (1 - p) = p(1 - q) = P(X = 1)P(Y = 0).$$

En regroupant les termes différemment et avec la loi marginale de Y , on a également

$$P(XY = 0) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = P(X = 0, Y = 1) + P(Y = 0),$$

d'où

$$P(X = 0, Y = 1) = 1 - pq - (1 - q) = q(1 - p) = P(X = 0)P(Y = 1).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= 1 - P(X = 1, Y = 0) \\ &\quad - P(X = 0, Y = 1) - P(X = 1, Y = 1) \\ &= 1 - p(1 - q) - q(1 - p) - pq \\ &= 1 - p - q + pq = (1 - p)(1 - q) \\ &= P(X = 0)P(Y = 0). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(i, j) \in \{0, 1\}^2$,

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j),$$

donc X et Y sont indépendantes.

220 CCP17

Le système différentiel s'écrit $X' = AX$ où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisons A : sans difficulté, $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 2i & -2i \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(2, 2i, -2i).$$

Alors

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X. \end{aligned}$$

Posons $Y = P^{-1}X$, ou encore $X = PY$. Comme P est constante, P^{-1} l'est donc $Y' = P^{-1}X'$. Alors

$$X' = AX \iff Y' = DY.$$

Commentaire. Cela revient à faire un changement de base pour simplifier le système différentiel.

Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} Y' = DY &\iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 2iy_2 \\ y_3' = -2iy_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_1 = \alpha_1 e^{2t} \\ y_2 = \alpha_2 e^{2it} \\ y_3 = \alpha_3 e^{-2it} \end{cases} \end{aligned}$$

221 CCP

1. Comme M et M^\top commutent, on a

$$\begin{aligned} S^2 &= (M^\top M)^2 = (M^\top)^2 M^2 \\ &= (-4I_2)^\top (-4I_2) = 16I_2. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $X^2 - 16$ est annulateur de S .

De plus, $(\frac{1}{4}S)^2 = I_2$. Or $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, donc il existe $P \in O(2)$ et $D = \text{diag}(\pm 1, \pm 1)$ telles que $\frac{1}{4}S = PDP^\top$. Mais si λ est valeur propre de $\frac{1}{4}S$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé, on a d'une part,

$$X^\top (\frac{1}{4}S) X = X^\top \lambda X = \lambda X^\top X,$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} X^\top (\frac{1}{4}S) X &= X^\top (\frac{1}{2}M)^\top (\frac{1}{2}M) X \\ &= (\frac{1}{2}MX)^\top (\frac{1}{2}MX). \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda = \frac{(\frac{1}{2}MX)^\top (\frac{1}{2}MX)}{X^\top X}.$$

Or $(\frac{1}{2}MX)^\top (\frac{1}{2}MX) = \|\frac{1}{2}MX\|^2 \geq 0$ et $X^\top X = \|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$. Donc $\lambda \geq 0$. Alors $D = I_2$ et $\frac{1}{4}S = I_2$, d'où $(\frac{1}{2}M)^\top (\frac{1}{2}M) = I_2$ et $\frac{1}{2}M$ est orthogonale.

2. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas,

$$(\frac{1}{2}M)^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = I_2,$$

donc $2\theta = 0 [2\pi]$, d'où $\theta = 0 [\pi]$ et $\frac{1}{2}M = \pm I_2$, donc $M = \pm 2I_2$.

Dans le second cas, on a toujours $(\frac{1}{2}M)^2 = I_2$.

Finalement, les matrices convenables sont

$$\pm 2I_2 \text{ et } 2 \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}.$$

222 ————— **CCP**

1. Tout polynôme annulateur de A admet les valeurs propres de A comme racines. Si A admet trois valeurs propres distinctes, il ne peut exister aucun polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2, sauf le polynôme nul bien-sûr.

On voit que -1 est valeur propre évidente de A , car il est seul sur la diagonale dans la troisième colonne de A . Comme A est triangulaire par blocs, ses autres valeurs propres sont valeurs propres du bloc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est $x^2 - x + 1$, qui admet deux racines complexes conjuguées distinctes.

2. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = (x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, donc $A^3 + I_3 = 0$. Cela entraîne que A est inversible et $A^{-1} = -A^2$.

3. On l'a dit, les polynômes annulateurs de A doivent avoir les valeurs propres de A comme racines. Comme elles sont simples, ces polynômes doivent être multiples de χ_A . L'ensemble des polynômes annulateurs est donc l'ensemble des multiples de χ_A .

223 ————— **MP17****224** ————— **MP17****225** ————— **MP17****226** ————— **MP17**

Considérons les racines troisièmes de l'unité, $1, j$ et j^2 . En développant par le binôme de Newton,

$$(1+1)^n = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \cdot 1^p,$$

$$(1+j)^n = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \cdot j^p,$$

$$(1+j^2)^n = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \cdot j^{2p},$$

donc en sommant, sachant que $1+j = e^{i\pi/3}$ et $1+j^2 = e^{-i\pi/3}$,

$$2^n + e^{ni\pi/3} + e^{-ni\pi/3} = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} (1^p + j^p + j^{2p}).$$

Si $p = 3k$ où $k \in \mathbb{N}$, $j^p = j^{3k} = 1$ et $j^{2p} = j^{6k} = 1$, donc

$$1^p + j^p + j^{2p} = 3.$$

De plus, si $p = 3k+1$ où $k \in \mathbb{N}$, $j^p = j^{3k} \cdot j = j$ et $j^{2p} = j^{6k} \cdot j^2 = j^2$, donc

$$1^p + j^p + j^{2p} = 1 + j + j^2 = 0.$$

De même, si $p = 3k+2$ où $k \in \mathbb{N}$, $j^p = j^2$ et $j^{2p} = j^4 = j$, donc

$$1^p + j^p + j^{2p} = 1 + j^2 + j = 0.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right).$$

227 ————— **MP18**

Le coefficient 2 est seul sur la diagonale dans la première colonne de B , donc c'est une valeur propre évidente de B . Mais $\det(A - 2I_3) = 24 \neq 0$, donc 2 n'est pas valeur propre de A . Alors A et B ne sont pas semblables.

Commentaires.

On voit que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 5$ et $\det(A) = \det(B) = 4$. Mais cela ne suffit pas à conclure.

Si 2 avait été valeur propre de A , on n'aurait pas pour autant pu conclure que A et B sont semblables.

228 ————— **CCP18****229** ————— **CCP18**

1. ENDOMORPHISME. ϕ est clairement linéaire, grâce à la linéarité à gauche du produit scalaire. Et bien-sûr, pour tout $x \in E$, $\phi(x) \in E$. Donc $\phi \in \mathcal{L}(E)$.

NOYAU. Soit $x \in E$. Sachant que (a, b) est libre,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } \phi &\iff \langle x, b \rangle a + \langle x, a \rangle b = 0_E \\ &\iff \langle x, b \rangle = 0 \text{ et } \langle x, a \rangle = 0 \\ &\iff x \perp b \text{ et } x \perp a. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker } \phi = a^\perp \cap b^\perp$.

IMAGE. Pour tout $x \in E$, clairement,

$$\phi(x) = \langle x, b \rangle a + \langle x, a \rangle b \in \text{Vect}(a, b),$$

donc $\text{Im } \phi \subset \text{Vect}(a, b)$. Or a^\perp et b^\perp sont deux hyperplans de E , non confondus car a et b ne sont pas colinéaires. Alors $\dim(\text{Ker } \phi) = n - 2$, donc avec le théorème du rang $\text{rg } \phi = 2$, d'où $\text{Im } \phi = \text{Vect}(a, b)$.

Commentaire. Comme (a, b) est libre, $n \geq 2$.

2. VALEURS PROPRES. Avec la question précédente, $\text{Im } \phi \perp \text{Ker } \phi$, donc avec le théorème du rang

$$E = \text{Ker } \phi \oplus \text{Im } \phi.$$

Considérons une base de E adaptée à cette somme directe, en choisissant (a, b) comme base de $\text{Im } \phi$. Comme

$$\phi(a) = \langle a, b \rangle a + \|a\|^2 b,$$

$$\phi(b) = \|b\|^2 a + \langle a, b \rangle b,$$

dans cette base, la matrice de ϕ s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & A \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} \langle a, b \rangle & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & \langle a, b \rangle \end{pmatrix}.$$

On voit que 0 est valeur propre de ϕ , de multiplicité au moins $n - 2$. Les autres valeurs propres de ϕ sont celles de A .

Commentaire. Si $n = 2$, $\text{Ker } \phi = \{0_E\}$ et 0 n'est pas valeur propre de ϕ .

Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\chi_A(t) &= t^2 - \text{Tr}(A)t + \det(A) \\ &= t^2 - 2\langle a, b \rangle t + \langle a, b \rangle^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \\ &= (t - \langle a, b \rangle)^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \\ &= \left(t - \langle a, b \rangle - \|a\| \|b\| \right) \left(t - \langle a, b \rangle + \|a\| \|b\| \right).\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont

$$\lambda = \langle a, b \rangle - \|a\| \|b\| \text{ et } \mu = \langle a, b \rangle + \|a\| \|b\|.$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\lambda\mu = \langle a, b \rangle^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 < 0.$$

L'inégalité est stricte car (a, b) est libre. Donc ces deux valeurs propres sont distinctes et de signes contraires.

Finalement,

$$\text{Sp } \phi = \{0_{n-2}, \lambda_1, \mu_1\},$$

en indexant les valeurs propres par leurs multiplicités.

DIAGONALISABILITÉ. Comme A admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, donc ϕ l'est.

CARACTÈRE SYMÉTRIQUE. Soient x et y dans E .

$$\begin{aligned}\langle \phi(x), y \rangle &= \langle x, b \rangle \langle a, y \rangle + \langle x, a \rangle \langle b, y \rangle \\ \text{et } \langle x, \phi(y) \rangle &= \langle y, b \rangle \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle \langle x, b \rangle \\ &= \langle \phi(x), y \rangle,\end{aligned}$$

donc ϕ est bien un endomorphisme symétrique de E .

230 CCP18

1. Procédons par récurrence.

Clairement, comme $B^0 = I_n$, on a

$$AB^0 = A = B^0(A + 0 \cdot I_n),$$

et la propriété est initialisée pour $k = 0$.

Supposons que pour un $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$AB^k = B^k(A + kI_n).$$

Alors, sachant que $AB = BA + B$,

$$\begin{aligned}AB^{k+1} &= (AB^k)B = B^k(A + kI_n)B \\ &= B^k(AB + kB) = B^k(BA + B + kB) \\ &= B^{k+1}(A + (k+1)I_n),\end{aligned}$$

et la propriété se transmet au rang $k + 1$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Supposons par l'absurde que $\det(B) \neq 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\det(B^k) = (\det B)^k \neq 0.$$

Ainsi, B^k est inversible et

$$A = B^k(A + kI_n)B^{-k}.$$

Donc A et $A + kI_n$ sont semblables, d'où

$$\det(A) = \det(A + kI_n),$$

ou encore,

$$\chi_A(0) = \chi_A(-k).$$

Ainsi, le polynôme $\chi_A - \chi_A(0)$ admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul. Mais c'est impossible car χ_A est unitaire.

Finalement, $\det(B) = 0$.

VARIANTE. Disons la même chose, mais différemment.

Considérons l'application

$$\varphi_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \mapsto AM - MA.$$

On a prouvé précédemment que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$AB^k - B^kA = kB^k,$$

autrement dit que

$$\varphi_A(B^k) = kB^k.$$

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k \neq 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})}$, alors B^k est vecteur propre de φ_A , donc k est valeur propre de φ_A . C'est impossible car le spectre de φ_A est fini puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $B^k = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors

$$0 = \det(B^k) = (\det B)^k$$

donc $\det B = 0$.

231 CS18

CONVENTION. Pour faciliter les écritures, confondons volontairement \mathbb{R}^n et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Par définition, $E_X \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Bien-sûr X est vecteur propre de la matrice nulle donc $0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})} \in E_X$ et $E_X \neq \emptyset$.

Soient A et B dans E_X et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe α et β dans \mathbb{R} tels que $AX = \alpha X$ et $BX = \beta X$. Alors

$$(A + \lambda B)X = (\alpha + \lambda\beta)X.$$

Comme X n'est pas nul, cela signifie que X est vecteur propre de $A + \lambda B$, donc $A + \lambda B \in E_X$.

Finalement, E_X est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc c'est un espace vectoriel.

2. Complétons X en une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n .

Soit $M \in E_X$. Comme X est vecteur propre de M , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'endomorphisme canoniquement associé à M admette dans la base \mathcal{B} la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

où $L \in \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Plus précisément, nommons P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à la base \mathcal{B} . Pour tout $M \in E_X$, il existe un unique

$$(\lambda, L, N) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Réciproquement, toute matrice de cette forme est clairement dans E_X . Autrement dit, l'application

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow E_X$$

définie par

$$\Phi((\lambda, L, N)) = P \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}$$

est un isomorphisme : le caractère bijectif vient d'être établi, et le caractère linéaire ne pose pas de difficulté. Alors

$$\begin{aligned}\dim(E_X) &= \dim(\mathbb{R} \times \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})) \\ &= 1 + (n-1) + (n-1)^2 \\ &= n^2 - n + 1.\end{aligned}$$