Première feuille d'exercices

Suites numériques

1

Étudier la convergence de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$.

2

Soit la suite (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Exprimer F_n en fonction de $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}\,)$ et de n.

2. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de F_{2p} la somme

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{5^k}\binom{2p+1}{2k}.$$

3

Considérons la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$. Déterminer u_n en fonction de n.

4

Considérons les suites réelles $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$, $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ et $w = (w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_n = u_n - 2\sqrt{n+1}, \\ w_n = u_n - 2\sqrt{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que v et w sont adjacentes.

2. En déduire un équivalent de u_n quand n augmente.

5 — CCINP23

1. Montrer que deux suites réelles (u_n) et (v_n), équivalentes en $+\infty$, ont le même signe à partir d'un certain rang.

2. Au voisinage de $+\infty$, quel est le signe de

$$u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \ ?$$

6 — CCP

Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$z_{n+1} = \tfrac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

1. Donner le module et l'argument de z_n en fonction de ceux de z_0.

2. Construire géométriquement z_{n+1} en fonction de z_n.

3. Étudier la convergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7 — X

Étudier la suite de terme général

$$u_n = e^{n/4}\, n^{-(n+1)/2}(1\cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{1/n}.$$

8 — AM

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On lui associe la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Montrer que si u converge vers 0, v aussi.

Indication. Pour $\varepsilon > 0$, on pourra considérer n_0 tel que $|u_n| < \varepsilon$ pour tout $n > n_0$, puis étudier

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k.$$

2. En déduire que si u converge vers une limite ℓ, v aussi.