Dixième feuille d'exercices

Permutations de limites

86 — CCP

1. Montrer la définition et la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de
$$S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\,x^2}.$$
2. Y est-elle intégrable ?

87 — CCP

1. Étudier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-t^n}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.
2. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

88 — CS

1. Étudier la convergence sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \cos^n(x)\sin(x)$.

2. On pose $g_n = n\,f_n$. Étudier la suite $(\int_0^{\pi/2} g_n)$.

3. Que dire de la suite de fonctions (g_n) ?

89 — CCP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose
$$f_n(x) = \frac{x^n\,e^{-x}}{n!}.$$
1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. Converge-t-elle uniformément ?

3. Montrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

4. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n$.

90 — CCP

1. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que $\frac{2}{\pi}\,t \leqslant \sin t$.

2. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite des fonctions
$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1-\sin\dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{n\pi}{2},\\ 0 & \text{si } x > \dfrac{n\pi}{2}.\end{cases}$$
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

91 — CCP

Étudier la convergence des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(4^n\,I_n)_{n\geqslant 0}$ où $I_n = \int_0^1 x^n\,(1-x)^n\,\mathrm{d}x$.

92 — CCINP25

Soit une série $\sum a_n$ absolument convergente.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{a_n}{n!}\,x^n$. On note f sa somme.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

93 — CCINP25

Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big) - \frac{x}{n}.$$
Si cela a un sens, on pose $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. Étudier la classe $\mathscr{C}^1$ de f sur $[0,1]$.

2. Calculer $f'(1)$.

94 — MP

Justifier l'existence de $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$ et en donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-3} près.

95 — CCP18

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.