Corrigés des exercices de la dixième feuille

86 — CCP

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{1+n^2\,x^2}.$$

DÉFINITION. Pour $x > 0$ fixé, la suite numérique $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et S y est définie.

CONTINUITÉ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient $a > 0$, $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2\,a^2}.$$

Or la série $\sum 1/(n^2\,a^2)$ converge et ne dépend pas de x. Alors la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, donc S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaire. Le théorème spécial des séries alternées aurait permis de montrer directement la convergence uniforme, mais ici, la convergence normale est aussi directe.

2. INTÉGRABILITÉ. On sait déjà que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et que les f_n et S y sont continues. De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

où $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f_n l'est aussi. Mais

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^2\,x^2} = \left[\frac{\operatorname{Arctan}(n\,x)}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\,n},$$

donc $\sum_{n\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ diverge et le théorème du cours ne s'applique pas.

Cependant, toujours d'après le théorème spécial des séries alternées,

$$|S(x)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant |f_1(x)| = \frac{1}{1+x^2}.$$

Où l'on voit donc que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaire. Les théorèmes du cours sont très puissants, mais pas toujours nécessaires.

87 — CCP

1. Soit $n \geqslant 2$. L'intégrande f_n de I_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $t \geqslant 1$,

$$|f_n(t)| = \frac{t^n - t}{1+t^{2n}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}.$$

Or la fonction $t \mapsto 1/t^n$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $n \geqslant 2 > 1$, donc f_n l'est aussi et I_n existe.

2. Utilisons le théorème de convergence dominée.
○ Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
○ Soit $t \in \mathbb{R}_+$. La suite (t^n) converge vers 0 si $t < 1$, 1 si $t = 1$ et $+\infty$ si $t > 1$. Donc la suite $(f_n(t))$ converge vers t si $t < 1$ et 0 si $t \geqslant 1$. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} t & \text{si } t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

○ La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
○ Soit $n \geqslant 2$. Pour $t \in [0, 1]$,

$$|f_n(t)| = \frac{t - t^n}{1+t^{2n}} \leqslant t.$$

Pour $t > 1$,

$$|f_n(t)| = \frac{t^n - t}{1+t^{2n}} \leqslant \frac{t^n}{t^{2n}} = \frac{1}{t^n} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Considérons la fonction

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} t & \text{si } t \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

de sorte que pour tout $t \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$,

$$|f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, car elle l'est sur $\mathbb{R}_+ \smallsetminus \{1\}$ et que ses limites à droite et à gauche en 1 valent $1 = \varphi(1)$. De plus, φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $t \mapsto 1/t^2$ l'est. Ainsi, l'hypothèse de domination est vérifiée.

Alors
- les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$,
- la suite (I_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

88 — CS

1. CONVERGENCE SIMPLE. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$, $|\cos x| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Il s'ensuit que (f_n) converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction nulle.

CONVERGENCE UNIFORME. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \geqslant 1$, $f_n'(x) = \cos^{n-1} x\,(-n\sin^2 x + \cos^2 x)$ donc

$$f_n'(x) = 0 \iff x = \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}.$$

Alors, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|f_n(x)| \leqslant f_n\!\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sin\!\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc (f_n) converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction nulle.

2. En posant $u = \cos x$,

$$\int_0^{\pi/2} n\cos^n x \sin x \,\mathrm{d}x = n\int_0^1 u^n \,\mathrm{d}u = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

3. On voit sans difficulté que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Mais comme $\int_0^{\pi/2} g_n \not\to 0$, (g_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

89 — CCP

Voir l'exemple du cours.

90 — CCP

1. Oui, par concavité du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand, $x \leqslant n\frac{\pi}{2}$, donc

$$f_n(x) = \exp\Big(n\ln\Big(1 - \sin\frac{x}{n}\Big)\Big).$$

En outre, quand n tend vers $+\infty$, $\sin\frac{x}{n} \sim \frac{x}{n}$, donc $\ln(1-\sin\frac{x}{n}) \sim -\frac{x}{n}$ et $n\ln(1-\sin\frac{x}{n}) \sim -x$. Par continuité de l'exponentielle en $-x$, $f_n(x) \sim e^{-x}$. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

3. Appliquons le théorème de convergence dominée. Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, car $f_n(n\frac{\pi}{2}) = 0$; la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f ; f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\Big(n\ln\Big(1 - \sin\frac{t}{n}\Big)\Big) \\ &\leqslant \exp\Big(n\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\frac{t}{n}\Big)\Big) \\ &\leqslant \exp\Big(-n\,\frac{2t}{\pi n}\Big) = e^{-2t/\pi}, \end{aligned}$$

où $t \mapsto e^{-2t/\pi}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors le théorème s'applique : les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = 1.$$

91 — CCP

1. Sur le segment $K = [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, donc $I_n \leqslant (\frac{1}{4})^n$ et $\lim I_n = 0$.

2. Appliquons le théorème de convergence dominée aux fonctions $f_n : K \to K$, $x \mapsto 4^n x^n (1-x)^n$, de sorte que $4^n I_n = \int_K f_n$.

∘ Les fonctions f_n sont continues sur K.
∘ On a $f_n(\frac{1}{2}) = 1$, et si $x \neq \frac{1}{2}$, $4x(1-x) < 1$, donc la suite numérique $(f_n(x))$ tend vers 0. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur K vers la fonction f, nulle sur K sauf en $\frac{1}{2}$ où elle vaut 1.
∘ La fonction f est continue par morceaux sur K.
∘ On a la domination $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, où la fonction $x \mapsto 1$ est positive, continue et intégrable sur K.

Alors, grâce au théorème susnommé,

- les f_n et f sont intégrables sur K ;
- $\lim \int_K f_n = \int_K f = 0$. Ainsi, $\lim 4^n I_n = 0$.

92 — CCINP25

1. Nommons R le rayon de convergence cherché. Comme $\sum a_n$ converge absolument, (a_n) est bornée, disons par M, donc $|a_n/n!| \leqslant M/n!$ Ainsi, R est minoré par le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n/n!$ On reconnait le développement en série entière de l'exponentielle, qui a pour rayon de convergence $+\infty$. Donc $R = +\infty$.

2. Permutons, puis justifions :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t}_{=\Gamma(n+1) = n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \end{aligned}$$

Les fonctions $f_n : t \mapsto a_n t^n e^{-t}/n!$ sont toutes intégrables sur $\mathbb{R}_+$, car $t^n e^{-t} \ll e^{-t/2}$ en $+\infty$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et sa somme $t \mapsto f(t)\,e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = |a_n|$, et par hypothèse, $\sum |a_n|$ converge. Alors, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et la permutation est permise.

93 — CCINP25

1. ∘ Par opérations usuelles, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$u_n'(x) = \frac{1}{n(1+\frac{x}{n})} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}.$$

∘ Soit $x \in [0,1]$. Quand n augmente,

$$u_n(x) = \frac{x}{n} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{x}{n} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Or $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge comme série de Riemann où $2 > 1$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

∘ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$|u_n'(x)| = \frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or ce majorant ne dépend pas de x et on l'a dit, $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$.

Alors

- S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$
- et pour tout $x \in [0,1]$,

$$S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

2. D'après le calcul précédent,

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) = -1,$$

où l'on a reconnu une somme télescopique.

94 — **MP**

Utilisons le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle, qui justifiera la convergence et permettra le calcul de cette intégrale.

Calcul formel. Voici un calcul formel, que l'on justifiera ensuite.

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \int_0^1 e^{-t}\ln t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}\ln t\,\mathrm{d}t\\
&(2) \quad \phantom{\int_0^1 e^{-t}\ln t \,\mathrm{d}t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t\\
&(3) \quad \phantom{\int_0^1 e^{-t}\ln t \,\mathrm{d}t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!\,(n+1)^2}\\
&(4) \quad \phantom{\int_0^1 e^{-t}\ln t \,\mathrm{d}t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\,n!}.
\end{aligned}$$

Justification. (1) Oui, grâce au développement en série entière usuel de l'exponentielle, dont le rayon de convergence est $+\infty$.

(3) En intégrant par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégration par parties est permises car les fonctions manipulées sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$, le crochet a un sens avec les limites usuelles car $n+1>0$, et la dernière intégrale n'est plus généralisée, donc elle converge. Ainsi,

$$\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

(4) Oui !

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto (-1)^n \dfrac{t^n}{n!}\ln t$ est continue sur $]0,1]$, et on vient de voir qu'elle y est intégrable. De plus, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme $f : t \mapsto e^{-t}\ln t$ est bien-sûr continue sur $]0,1]$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(n+1)^2\,n!} \leqslant \frac{1}{n!}$$

et $\sum 1/n!$ converge donc $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge.

D'après le théorème annoncé, f est intégrable sur $]0,1]$, ce qui justifie comme prévu l'existence de $\int_0^1 f$, et l'on peut permuter série et intégrale, ce qui justifie (2).

Valeur approchée. Ainsi,

$$\int_0^1 e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\,n!}.$$

C'est la somme d'une série alternée, redevable du critère spécial des séries alternées puisque $\left(\frac{1}{n\,n!}\right)$ décroit vers 0. En vertu de ce théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\,k!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!}.$$

Donc ceci est un majorant de l'erreur commise en approchant la somme complète par la somme partielle d'indice n. Pour avoir une erreur inférieure à 10^{-3}, il suffit de choisir ce majorant inférieur à 10^{-3}, c'est-à-dire $(n+1)\,(n+1)! \geqslant 1\,000$, soit $n=5$. Ainsi, une valeur approchée de l'intégrale à 10^{-3} près est

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^n}{n\,n!} = -\frac{5\,737}{7\,200}.$$

Bonus. Voici un peu de Python, pour le plaisir.

```
import numpy as np
from scipy import integrate
# fonction
F = lambda x: np.exp(-x)*np.log(x)
# intégrale
I = integrate.quad(F, 0, 1)[0]
print("intégrale       :", I)
# somme, signe, factorielle, n
S, s, f, n = 0, -1, 1, 5
# somme partielle d'indice n
for k in range(1, n+1):
    S += s/k/f
    f *= k+1
    s *= -1
print("somme partielle :", S)
# différence entre I et S
print("différence      :", I - S)
```

95 — **CCP18**

Préambule. Utilisons le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle, qui prouvera au passage la convergence de l'intégrale.

Calcul. Voici un calcul formel que l'on justifiera ensuite. Nommons I l'intégrale de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\frac{x^2\,e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x\\
(1) \quad &= \int_0^{+\infty} x^2\,e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}\,\mathrm{d}x\\
(2) \quad &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x\\
(3) \quad &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,e^{-t}}{(n+1)^3}\,\mathrm{d}t\\
(4) \quad &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\,\Gamma(3)\\
(5) \quad &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.
\end{aligned}$$

Justifications.

(4) On reconnait que

$$\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{3-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(3).$$

(5) On sait que $\Gamma(3) = 2! = 2$ et on translate l'indice dans la somme.

(3) le changement de variable $t = (n+1)\,x$ est licite car $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. Et comme on a reconnu $\Gamma(3)$, qui converge, la première intégrale converge et l'égalité est valide.
(1) On connait le développement en série entière usuel

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

valable pour $u \in \left]-1, 1\right[$, et on l'utilise pour $x > 0$ et $u = e^{-x} \in \left]0, 1\right[$.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto x^2\, e^{-(n+1)x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle y est aussi intégrable d'après (3). D'après (1), $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa somme $f : x \mapsto x^2/(e^x - 1)$ y est continue. Enfin, d'après (3), (4) et (5),

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{2}{(n+1)^3} \sim \frac{2}{n^3}$$

où $\sum 1/n^3$ converge, donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

D'après le théorème invoqué en préambule, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et en passant I existe, et l'on peut permuter série et intégrale, ce qui justifie (2).

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$