Onzième feuille d'exercices

Espaces vectoriels normés

96 — CCP

On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $\alpha = (\alpha_n)$ telles que la série $\sum \alpha_n^2$ converge et on admet que

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^2}$$

définit une norme euclidienne sur ℓ^2.

1. Montrer que, dans $\mathbb{R}$, $|a\,b| \leqslant \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2)$ et en déduire que ℓ^2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soit $\alpha \in \ell^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(n\,x).$$

Montrer que la série de fonctions $\sum \alpha_n\, s_n/n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Montrer la continuité sur $\mathbb{R}$ de la somme

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n}\, s_n.$$

3. Montrer que la fonction $\varphi : \alpha \mapsto \varphi(\alpha)$ est linéaire. Pour $p \geqslant 1$, calculer $\int_{[0,\pi]} s_p\,\varphi(\alpha)$ et en déduire que φ est injective sur ℓ^2.

4. Montrer que pour tout $\alpha \in \ell^2$, $\varphi(\alpha)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|\varphi(\alpha)\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant k\,\|\alpha\|.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

97

Considérons le segment $I = [0,1]$ et l'ensemble

$$E = \{f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_I |f + f'| \text{ et } N_2(f) = \sup_I |f| + \sup_I |f'|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.

3. Montrer qu'elles sont équivalentes. *Indication : si $f \in E$, considérer l'application $g : x \mapsto e^x f(x)$.*

98 — CCINP19

Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \|A\,B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} A^k$.

1. Montrer que la suite $(A^k)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0.

2. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \|A^k\|$ converge. On admet qu'alors, la suite $(S_p)_{p\geqslant 0}$ converge et l'on note S sa limite.

3. Montrer que la fonction $f : M \mapsto (I_n - A)\,M$ est continue.

4. Calculer $(I_n - A)\,S_p$. Que conclure ?

99 — CCP

Pour toute matrice $X = (x_i)$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose

$$N_\infty(X) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$M_A = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$N_\infty(A\,X) \leqslant M_A\, N_\infty(X).$$

2. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{N_\infty(A\,X)}{N_\infty(X)} \;\middle|\; X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}$$

possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

3. On pose

$$\widetilde{N}_\infty(A) = \sup_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}} \frac{N_\infty(A\,X)}{N_\infty(X)}.$$

Montrer que $\widetilde{N}_\infty(A) \leqslant M_A$.