Corrigés des exercices de la onzième feuille

96 — **CCP**

1. Raisonnons par équivalence. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}|a\,b|\leqslant \tfrac{1}{2}\,(a^2+b^2) &\iff a^2-2\,|a\,b|+b^2\geqslant 0\\ &\iff (|a|-|b|)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vraie, donc celle du départ l'est aussi.

Montrons que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Bien-sûr, $\ell^2\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell^2\neq\varnothing$ car la suite nulle est dans ℓ^2.

Soient α et β deux suites de ℓ^2 et λ dans $\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}$: $(\alpha_n+\lambda\beta_n)^2=\alpha_n^2+2\lambda\alpha_n\beta_n+\lambda^2\beta_n^2$. D'après la majoration précédente, $2\,\alpha_n\,\beta_n\leqslant\alpha_n^2+\beta_n^2$, d'où $(\alpha_n+\lambda\,\beta_n)^2\leqslant(1+\lambda)\,(\alpha_n^2+\lambda\,\beta_n^2)$. Comme les séries $\sum\alpha_n^2$ et $\sum\beta_n^2$ convergent, la série $\sum(\alpha_n^2+\lambda\,\beta_n^2)$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes et $\sum(\alpha_n+\lambda\,\beta_n)^2$ converge par majoration. Donc $\alpha+\lambda\beta\in\ell^2$ et ℓ^2 est stable par combinaison linéaire.

Ainsi, ℓ^2 est bien un espace vectoriel.

2. Soit $\alpha\in\ell^2$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $s_n : x\mapsto\sin(n\,x)$ et $b_n=\alpha_n/n$ de sorte que l'on étudie la série de fonctions $\sum b_n\,s_n$. Comme on travaille sur $\mathbb{R}$ et qu'il n'y a pas d'ambigüité, notons $\|\cdot\|_\infty$ au lieu de $\|\cdot\|_\infty^{\mathbb{R}}$. On a

$$\|b_n\,s_n\|_\infty=|b_n|=\frac{|\alpha_n|}{n}\leqslant\tfrac{1}{2}\,(\alpha_n^2+1/n^2).$$

La série $\sum\alpha_n^2$ converge car $\alpha\in\ell^2$; la série $\sum 1/n^2$ converge comme série de Riemann avec $2>1$; donc la série $\sum\frac{1}{2}\,(\alpha_n^2+1/n^2)$ converge ; alors la série $\sum\|b_n\,s_n\|_\infty$ converge, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum b_n\,s_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Comme les fonction $b_n\,s_n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions $\sum b_n\,s_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, la somme $\varphi(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\,s_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. La linéarité de φ ne pose pas de difficulté.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\int_0^\pi s_p\,\varphi(\alpha)=\int_0^\pi\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\,s_n\,s_p=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\int_0^\pi s_n\,s_p.$$

Cette permutation est permise car la série de fonctions $\sum b_n\,s_n\,s_p$ converge normalement donc uniformément sur le *segment* $[0,\pi]$, pour les mêmes raisons que dans la question précédente. En outre, pour $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi\sin(n\,t)\sin(p\,t)\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2}\int_0^\pi(\cos((n-p)\,t)-\cos((n+p)\,t))\,\mathrm{d}t\\ &=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq p\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n=p.\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^\pi s_p\,\varphi(\alpha)=\frac{\pi}{2}\,b_p$.

Si pour $\alpha\in\ell^2$, $\varphi(\alpha)=0$, alors pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $b_p=0$ c'est-à-dire $\alpha_p=0$ donc $\alpha=0$. Ainsi, φ est injective.

4. Soit $\alpha\in\ell^2$. On l'a vu, la fonction $\varphi(\alpha)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est bornée sur le segment $[0,2\,\pi]$. De plus, elle est clairement $2\,\pi$-périodique, comme somme de fonctions qui le sont. Donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $\alpha\in\ell^2$. On a

$$\begin{aligned}\|\varphi(\alpha)\|_\infty&=\left\|\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\,s_n\right\|_\infty\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\|b_n\,s_n\|_\infty\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\alpha_n|}{n}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty}1/n^2}.\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ donc $\displaystyle\|\varphi(\alpha)\|_\infty\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\,\|\alpha\|$.

97

1. E est un espace vectoriel car c'est le noyau de la forme linéaire $\varphi:\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ f\mapsto f(0)$.

2. Comme f, f' et $f+f'$ sont continues sur I, on voit que

$$N_1(f)=\|f+f'\|_\infty \text{ et } N_2(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty,$$

en reconnaissant la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$ des fonctions continues sur le segment I. La vérification que N_1 et N_2 sont des normes est alors immédiate. Précisons que si $N_1(f)=0$, $f+f'=0$, mais comme $f(0)=0$, la seule solution de ce problème de Cauchy est $f=0$.

3. Soit $f\in E$.

On sait déjà que $\|f+f'\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$, c'est-à-dire que $N_1(f)\leqslant N_2(f)$.

En outre, pour $x\in I$, $g'(x)=e^x\,(f(x)+f'(x))$ donc $|g'(x)|=e^x\,|f(x)+f'(x)|\leqslant e^x\,N_1(f)$. Alors

$$\begin{aligned}e^x\,|f(x)|&=|g(x)-g(0)|=\left|\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\int_0^x|g'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x e^t\,N_1(f)\,\mathrm{d}t=(e^x-1)\,N_1(f),\end{aligned}$$

d'où $|f(x)|\leqslant(1-e^{-x})\,N_1(f)\leqslant(1-e^{-1})\,N_1(f)$ et $\|f\|_\infty\leqslant(1-e^{-1})\,N_1(f)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=|f'(x)+f(x)-f(x)|\\ &\leqslant|f'(x)+f(x)|+|f(x)|\\ &\leqslant N_1(f)+(1-e^{-1})\,N_1(f)\end{aligned}$$

et $\|f'\|_\infty\leqslant(2-e^{-1})\,N_1(f)$.

Alors, $N_2(f)\leqslant(3-2\,e^{-1})N_1(f)$.

Finalement, les normes N et N' sont équivalentes.

98 — **CCINP19**

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. Or $\|A\| < 1$, donc $\lim\|A^k\| = 0$, c'est-à-dire $\lim A^k = 0$.

2. Pour la même raison, $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$, et $\sum\|A\|^k$ converge comme série géométrique de raison $\|A\| < 1$. Donc par majoration, $\sum\|A^k\|$ converge.

3. La fonction f est linéaire, donc elle est continue, puisque E est de dimension finie.

4. On a $(I_n - A)\,S_p = I_n - A^{p+1}$. Comme (A^p) converge vers 0, $\lim(I_n - A^{p+1}) = I_n$. En outre, $(I_n - A)\,S_p = f(S_p)$; f est continue ; et $\lim S_p = S$; donc par caractérisation séquentielle de la limite, $\lim f(S_p) = f(S)$. Ainsi, à la limite, $(I_n - A)\,S = I_n$. Cela signifie que $I_n - A$ est inversible, et que son inverse est $(I_n - A)^{-1} = S$.

99 — **CCP**

1. Soient $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

$$|(AX)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,N_\infty(X) = N_\infty(X)\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\leqslant N_\infty(X)\,M_A.$$

Donc $\max_{1\leqslant i\leqslant n}|(AX)_i| \leqslant N_\infty(X)\,M_A$. Ainsi,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \ N_\infty(AX) \leqslant M_A\,N_\infty(X).$$

2. Il s'ensuit que l'ensemble de l'énoncé, évidemment non vide, est majoré (par M_A) donc il admet une borne supérieure.

3. D'après 1, pour tout $X \neq 0$ dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$\frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)} \leqslant M_A,$$

donc

$$\sup_{X\neq 0} \frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)} \leqslant M_A,$$

d'où

$$\widetilde{N}_\infty(A) \leqslant M_A.$$