# Douzième feuille d'exercices

## Matrices & déterminants

**100**

Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$, dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^4$ est
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$
Donner des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

**101**

Considérons $E = \mathbb{R}_3[X]$ et
$$\Phi : E \to E,\ P(X) \mapsto P(1-X).$$
**1.** Montrer que $\Phi \in \mathfrak{L}(E)$ et donner sa matrice dans la base canonique de $E$.

**2.** Montrer que la famille $((X - \frac{1}{2})^k)_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ est une base de $E$.

**3.** Donner la matrice de $\Phi$ dans cette base.

**102** — **CCP**

Considérons $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

**1.** Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$ ?

**2.** On suppose que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que la matrice de $f$ dans la base canonique s'écrive
$$\begin{pmatrix} r\cos\alpha\sin\alpha & -r\cos^2\alpha \\ r\sin^2\alpha & -r\cos\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

**103**

Considérons la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer $H^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

**2.** En déduire les inverses des matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**104**

Calculer $\det(A)$ où $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifie $a_{ii} = a$, $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{ij} = 0$ sinon, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

**105** — **AM**

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_j$, $j \in [\![1, n]\!]$. Calculer, en fonction de $\det(M)$, le déterminant de la matrice $M'$ de colonnes
$$C'_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} C_i,\ j \in [\![1, n]\!].$$

**106** — **CS**

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ii} = 2\cos\theta$, $a_{ij} = -1$ si $|j - i| = 1$, $a_{ij} = 0$ sinon. Calculer $\det(A_n)$.

**107** — **MT**

Soit $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3) \smallsetminus \{0\}$ tel que $f^3 + f = 0$.

**1.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

**2.** Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $f$ a pour matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**108** — **CCP**

Soient $n$ un entier, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\Phi$ l'application qui à tout $P \in E$ associe le polynôme
$$\Phi(P)(X) = \int_X^{X+1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$
**1.** Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $E$.

**2.** Calculer son déterminant.

**109** — **CS18**

Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
sont-elles semblables ?

**110** — **X**

Soient deux matrices $A$ et $B$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ si et seulement si elles sont semblables.

**111** — **CCP**

Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, posons $f(M) = M + \operatorname{Tr}(M)\, I_n$.

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les dimensions de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

**2.** Trouver un polynôme annulateur de $f$ de degré 2.

**3.** $f$ est-il bijectif ? Si oui, donner $f^{-1}$.