Treizième feuille d'exercices

Compléments sur les espaces vectoriels

112

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \{f \in E \mid f(1) = 0\},$$
$$G_1 = \{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax\},$$
$$G_2 = \{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2\}.$$

2. Montrer que $E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$.

113 — **WP**

Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_2[X]$ et G l'ensemble des polynômes de E dont 1 est racine au moins triple.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E dont F est un supplémentaire.

2. Déterminer la projection sur F parallèlement à G.

114 — **CCP16**

On considère une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que

— $\sum_{i=1}^{p} f_i = \mathrm{id}_E$;
— $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow f_i \circ f_j = 0$.

Montrer que les f_i sont des projecteurs de E et que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i).$$

115 — **CCP**

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

116 — **CCP**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_3 = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k à l'aide de I_3, A et A^2.

117

Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que les ensembles

$$H = \left\{f \in E \,|\, f'(0) = 0\right\} \text{ et } K = \left\{f \in E \,|\, \int_0^1 f = 0\right\}$$

sont des hyperplans de E et en donner un supplémentaire.

118 — **CCP**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & \ddots & \\ (0) & \ddots\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

119 — **IIE**

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$. Montrer que $p + q - p \circ q$ est un projecteur dont on donnera l'image et le noyau.

120 — **MP**

Montrer que si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie,

$$\dim(\mathrm{Ker}\, u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}\, u).$$

121 — **CS**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Considérons l'endomorphisme f de E défini par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $f(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

2. Calculer $f^n(e_1)$ et en déduire un polynôme annulateur de f.