

Corrigés des exercices de la treizième feuille

112

1. Comme $G_1 = \text{Vect}(x \mapsto x)$ et $G_2 = \text{Vect}(x \mapsto x^2)$, ce sont bien des sous-espaces vectoriels de E , plus précisément, des droites vectorielles.

L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$ est une forme linéaire non nulle et $F = \text{Ker } \varphi$, donc F est un sous-espace vectoriel de E , plus précisément un hyperplan.

2. Voici deux preuves.

À LA MAIN. Raisonnons par analyse-synthèse pour prouver que $E = F \oplus G_1$, la preuve étant analogue pour l'autre somme directe. Soit $h \in E$.

Analyse. Si l'on peut écrire $h = f + g$ où $(f, g) \in F \times G_1$, alors $h(1) = f(1) + g(1) = g(1)$. Or il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g = a \text{id}_{\mathbb{R}}$ donc $g(1) = a$. Ainsi, $a = h(1)$ et $f = h - h(1) \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Synthèse. Posons $g = h(1) \text{id}_{\mathbb{R}}$ et $f = h - h(1) \text{id}_{\mathbb{R}}$. Clairement, $g \in G_1$ et comme $f(1) = h(1) - h(1) = 0$, $f \in F$. Enfin par construction, $h = f + g$.

Conclusion. Tout $h \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $h = f + g$ où $(f, g) \in F \times G_1$ donc $E = F \oplus G_1$.

HYPERPLANS. On a vu que F est un hyperplan de E . Or $\text{id}_{\mathbb{R}} \notin F$ donc d'après le cours, $E = F \oplus \mathbb{R} \text{id}_{\mathbb{R}}$. De même, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas dans F donc $E = F \oplus G_2$.

113

WP

1. On voit que $G = A\mathbb{R}[X]$ où $A = (X - 1)^3$. On sait que c'est un sous-espace vectoriel de E et que

$$E = A\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}_2[X] = G \oplus F,$$

d'après le théorème de la division euclidienne.

2. Soit $P \in E$. D'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^k \\ &= \underbrace{P(1) + P'(1)(X - 1) + \frac{1}{2} P''(1)(X - 1)^2}_{\in F} \\ &\quad + \underbrace{(X - 1)^3 \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X - 1)^{k-3}}_{\in G}, \end{aligned}$$

où les sommes sont finies. Par unicité de la décomposition de P dans la somme directe $E = F \oplus G$, le projeté de P sur F parallèlement à G est donc

$$P(1) + P'(1)(X - 1) + \frac{1}{2} P''(1)(X - 1)^2.$$

114

CCP16

MONTRONS QUE les f_i sont des projecteurs de E .

Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. En composant la première relation par f_j , on a $(\sum_{i=1}^p f_i) \circ f_j = \text{id}_E \circ f_j$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^p f_i \circ f_j = f_j$. Grâce à la seconde relation, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $i \neq j$, $f_i \circ f_j = 0$, donc il reste $f_j \circ f_j = f_j$, ce qui signifie que f_j est un projecteur de E .

MONTRONS QUE $E = \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

Bien entendu, $\sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i) \subset E$ puisque les $\text{Im}(f_i)$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

Et en évaluant la première relation en un $x \in E$ quelconque, $\sum_{i=1}^p f_i(x) = x$, où pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i(x) \in \text{Im}(f_i)$. Cela signifie que $x \in \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$. Donc $E \subset \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

Alors, $E = \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

MONTRONS QUE la somme est directe.

Pour cela, montrons que 0 n'y admet que la décomposition triviale. Supposons que l'on ait $0 = \sum_{i=1}^p x_i$, où $x_i \in \text{Im}(f_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Comme f_i est un projecteur de E , $x_i = f_i(x_i)$. Alors, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} 0 &= f_j(0) = f_j(\sum_{i=1}^p x_i) \\ &= \sum_{i=1}^p f_j(x_i) = \sum_{i=1}^p f_j \circ f_i(x_i) \\ &= f_j \circ f_j(x_j) = f_j(x_j) = x_j. \end{aligned}$$

Ainsi, dans la décomposition $0 = \sum_{i=1}^p x_i$, les x_i sont tous nuls, donc 0 n'admet que la décomposition triviale, et la somme est directe.

FINALEMENT, $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

115

CCP

Voici (presque) trois méthodes.

PREMIÈRE MÉTHODE. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme

$$\begin{aligned} \chi_A &= X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) \\ &= X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3) \end{aligned}$$

est annulateur de A .

Effectuons la division euclidienne de X^n par χ_A : il existe un unique $(Q_n, a_n, b_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$(1) \quad X^n = \chi_A Q_n + a_n X + b_n.$$

En évaluant cette égalité en les racines de χ_A (les valeurs propres de A),

$$\begin{cases} 2^n = 2a_n + b_n \\ 3^n = 3a_n + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = 3^n - 2^n, \\ b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n. \end{cases}$$

En évaluant (1) en A , on a finalement,

$$A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2.$$

DEUXIÈME MÉTHODE. Afin d'appliquer le binôme de Newton, on cherche une écriture de la forme $A = B + C$, où B et C commutent. On trouve (par exemple)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2 + B.$$

On voit que $B^2 = B$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k B^{n-k} = 2^n I_2 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k B \\ &= 2^n I_2 + ((1+2)^n - 2^n) B \\ &= 2^n I_2 + (3^n - 2^n) B. \end{aligned}$$

TROISIÈME MÉTHODE. On diagonalise A ...

116 ————— **CCP**

Le polynôme

$$P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = (X + 2)(X - 1)(X - 3)$$

est annulateur de A .

Commentaire. En passant, comme il est scindé à racines simples, A est diagonalisable.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de X^k par P : il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ et $R_k \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $X^k = Q_k P + R_k$ (*). En évaluant cette égalité en les racines de P , -2 , 1 et 3 , on obtient $R_k(-2) = (-2)^k$, $R_k(1) = 1^k = 1$ et $R_k(3) = 3^k$. En écrivant $R_k = a_k X^2 + b_k X + c_k$, où $(a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$, on trouve sans difficulté :-)

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{15}(-2)^k - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}3^k, \\ b_k &= -\frac{4}{15}(-2)^k + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}3^k, \\ c_k &= \frac{1}{5}(-2)^k + 1 - \frac{1}{5}3^k. \end{aligned}$$

Enfin, en évaluant (*) en A , on obtient

$$\begin{aligned} A^k &= R_k(A) = a_k A^2 + b_k A + c_k I_3 \\ &= \left(\frac{1}{15}(-2)^k - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}3^k\right) A^2 \\ &\quad + \left(-\frac{4}{15}(-2)^k + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}3^k\right) A \\ &\quad + \left(\frac{1}{5}(-2)^k + 1 - \frac{1}{5}3^k\right) I_3. \end{aligned}$$

117 —————

L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f'(0)$ est clairement une forme linéaire sur E , non nulle car $\varphi(\text{id}_{\mathbb{R}}) = 1$. Donc $H = \text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E . En outre, $E = H \oplus \mathbb{R} \text{id}_{\mathbb{R}}$ car $\text{id}_{\mathbb{R}} \notin H$.

Idem pour K .

118 ————— **CCP**

Comme $u^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur $e_1 \neq 0$ tel que $u^{n-1}(e_1) \neq 0$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, posons $e_{i+1} = u^i(e_1)$. Montrons que la famille $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de E . Soit une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u^{i-1}(e_1) = 0.$$

En appliquant u^{n-1} et sachant que $u^p = 0$ si $p \geq n$, on a $\lambda_1 u^{n-1}(e_1) = 0$ donc $\lambda_1 = 0$. Alors, en appliquant u^{n-2} , $\lambda_2 u^{n-1}(e_1) = 0$ et $\lambda_2 = 0$. Par récurrence, on en déduit que les λ_i sont tous nuls. La famille (e_i) est donc libre. Comme elle contient n vecteurs, c'est une base de E . Pour finir, dans cette base, la matrice de u est celle demandée.

119 ————— **IIE**

Tout d'abord, comme $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$, $q \circ p = 0$.

1. Posons $r = p + q - p \circ q$. Comme p et q sont des endomorphismes de E , r l'est aussi. En outre,

$$\begin{aligned} r^2 &= (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) \\ &= p \circ p + p \circ q - p \circ p \circ q \\ &\quad + q \circ p + q \circ q - q \circ p \circ q \\ &\quad - p \circ q \circ p - p \circ q \circ q + p \circ q \circ p \circ q \\ &= p + p \circ q - p \circ q + 0 + q - 0 - 0 - p \circ q + 0 \\ &= p + q - p \circ q = r, \end{aligned}$$

et r est bien un projecteur de E .

2. Soit $x \in \text{Im } r$. Comme r est un projecteur,

$$\begin{aligned} x &= r(x) = p(x) + q(x) - p \circ q(x) \\ &= p(x - q(x)) + q(x) \in \text{Im } p + \text{Im } q, \end{aligned}$$

donc $\text{Im } r \subset \text{Im } p + \text{Im } q$.

Réciproquement, si $x \in \text{Im } p$, $q(x) = 0$ donc $r(x) = p(x) = x$ donc $x \in \text{Im } r$ et $\text{Im } p \subset \text{Im } r$; et si $x \in \text{Im } q$, $x = q(x)$ donc $r(x) = p(x) + q(x) - p(x) = q(x) = x$ et $x \in \text{Im } r$, donc $\text{Im } q \subset \text{Im } r$. Alors $\text{Im } p + \text{Im } q \subset \text{Im } r$. Il s'ensuit que $\text{Im } r = \text{Im } p + \text{Im } q$.

En outre, $\text{Im } q \cap \text{Ker } q = \{0\}$ car $E = \text{Im } q \oplus \text{Ker } q$, et comme $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$, $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0\}$. Alors la somme $\text{Im } p + \text{Im } q$ est directe et $\text{Im } r = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$.

3. Soit $x \in \text{Ker } r$. On a $r(x) = 0$ donc

$$0 = p \circ r(x) = p(x) + p \circ q(x) - p \circ q(x) = p(x)$$

et $x \in \text{Ker } p$. De même, sachant que $q \circ p = 0$,

$$0 = q \circ r(x) = q \circ p(x) + q(x) + q \circ p \circ q(x) = q(x)$$

et $x \in \text{Ker } q$. Ainsi, $\text{Ker } r \subset \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Réciproquement, si $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ donc

$$r(x) = p(x) + q(x) - p \circ q(x) = 0$$

et $x \in \text{Ker } r$. Ainsi, $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker } r$.

Finalement, $\text{Ker } r = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

120 ————— **MP**

1. On sait que $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(u^2)$ donc

$$\dim(\text{Ker } u) \leq \dim(\text{Ker}(u^2)).$$

2. Considérons la restriction $v = u|_{\text{Ker}(u^2)}$,

$$v : \text{Ker}(u^2) \rightarrow E, \quad x \mapsto u(x),$$

et étudions son noyau et son image.

Montrons que $\text{Ker } v \subset \text{Ker } u$. Soit $x \in \text{Ker } v$. Comme $v(x) = 0$, $u(x) = 0$ et $x \in \text{Ker } u$. Donc l'inclusion est acquise et $\dim(\text{Ker } v) \leq \dim(\text{Ker } u)$.

Montrons que $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$. Soit $y \in \text{Im } v$: il existe $x \in \text{Ker}(u^2)$ tel que $y = u(x)$. Alors $u(y) = u^2(x) = 0$, donc $y \in \text{Ker } u$. Donc l'inclusion est acquise et $\text{rg}(v) \leq \dim(\text{Ker } u)$.

Pour finir, d'après le théorème du rang et avec ce qui précède,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(u^2)) &= \dim(\text{Ker } v) + \text{rg}(v) \\ &\leq 2 \dim(\text{Ker } u). \end{aligned}$$

121 ————— **CS**

1. La matrice de f est clairement

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & (0) & a_1 \\ 1 & \ddots & a_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

2. Comme $f(e_1) = e_2$, on a $f^2(e_1) = e_3$, donc par une récurrence immédiate, $f^{k-1}(e_1) = e_k$. Alors

$$f(e_n) = f(f^{n-1}(e_1)) = f^n(e_1) = \sum_{k=1}^n a_k f^{k-1}(e_1),$$

où l'on voit que $P(f)(e_1) = 0$, en notant

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k.$$

Montrons que $P(f) = 0$, en l'évaluant sur la base $\mathcal{B}$. Comme les polynômes en f commutent, on a

$$\begin{aligned} P(f)(e_k) &= P(f)(f^{k-1}(e_1)) = (P(f) \circ f^{k-1})(e_1) \\ &= (f^{k-1} \circ P(f))(e_1) = f^{k-1}(P(f)(e_1)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, P est bien un polynôme annulateur de f .