Quatorzième feuille d'exercices

Éléments propres

122

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

123 — CCP

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, et soit l'application $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto \mathrm{Tr}(M)\,A$.

1. Montrer que f est linéaire et donner son noyau.

2. Donner ses éléments propres.

124 — CCP

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension n. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi : \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E)$, $u \mapsto u \circ p$.

125 — CCP

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

2. Donner le sous-espace propre associé.

3. Déterminer les autres éléments propres de A.

126 — CCP

Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)(X) = (X-1)^2\,P''(X)$ est un endomorphisme. Donner ses valeurs propres. Est-il injectif ?

Réduction

127

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

128 — AM

Réduire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

129 — MT

Diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}$.

130 — IIE

1. Calculer le déterminant et la trace de

$$\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ A \mapsto A^\top.$$

2. Est-elle diagonalisable ?

131 — Navale

Déterminer les matrices M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

132 — CCP

Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ non inversibles telles que $\mathrm{Tr}(A) = 3$ et $A^3 - 3\,A^2 + 2\,A = 0$.

133 — CS

On définit l'endomorphisme φ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ par

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & b & c & a \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ p & n & o & d \end{pmatrix}.$$

Est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

134 — MP

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Étudier les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{3}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}c_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n. \end{cases}$$

135 — AM

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 7x - 12y + 6z, \\ y' = 10x - 19y + 10z, \\ z' = 12x - 24y + 13z. \end{cases}$$