Corrigés des exercices de la quatorzième feuille

122

Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\,\lambda + 2).$$

Continuons dans $\mathbb{C}$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{3, 1+i, 1-i\}$ et on trouve

$$E_3(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } E_{1+i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1-2i\\2\\i\end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne refait pas les calculs. En effet, comme A est réelle, si $X \in E_{1+i}(A)$, $A\,X = (1+i)\,X$ donc en conjuguant, $A\,\overline{X} = (1-i)\,\overline{X}$, donc $\overline{X} \in E_{1-i}(A)$. Alors

$$E_{1-i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1+2i\\2\\-i\end{pmatrix}.$$

123 — CCP

1. Comme la trace est linéaire, f est un endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $A \neq 0$, donc si $M \in \operatorname{Ker} f$, $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, $f(M) = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \mathrm{Tr}$.

2. Comme $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, $0 \in \mathrm{Sp}(f)$. En outre, $A \neq 0$ et $f(A) = \mathrm{Tr}(A)A$, donc $\mathrm{Tr}(A) \in \mathrm{Sp}(f)$. C'est bien une autre valeur propre car $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Comme $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan et que $A \notin \operatorname{Ker} f$, $E = \operatorname{Ker}\mathrm{Tr} \oplus \mathbb{C}\,A = E_0(f) \oplus E_{\mathrm{Tr}(A)}(f)$. Donc il n'y a pas d'autre valeur propre.

Commentaire. En passant, f est diagonalisable.

124 — CCP

1. Si $p = \mathrm{id}_E$, pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = u$, donc $\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))}$, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$ et $E_1(\varphi) = \mathfrak{L}(E)$.

2. Si $p = 0_{\mathfrak{L}(E)}$, pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$, donc $\varphi = 0_{\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))}$, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0\}$ et $E_0(\varphi) = \mathfrak{L}(E)$.

3. Supposons désormais que $p \notin \{0_{\mathfrak{L}(E)}, \mathrm{id}_E\}$: comme $p \circ p = p$, pour tout $u \in \mathfrak{L}(E)$, on a

$$\varphi \circ \varphi(u) = (u \circ p) \circ p = u \circ (p \circ p) = u \circ p = \varphi(u).$$

Donc $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Ainsi, φ est un projecteur de $\mathfrak{L}(E)$ et $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{0,1\}$.

Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$. On a

$$\begin{aligned}
u \in E_0(\varphi) &\iff \varphi(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}\\
&\iff u \circ p = 0_{\mathfrak{L}(E)}\\
&\iff \forall x \in E,\ u(p(x)) = 0_E\\
&\iff \forall y \in \operatorname{Im} p,\ u(y) = 0_E\\
&\iff \forall y \in \operatorname{Im} p,\ y \in \operatorname{Ker} u\\
&\iff \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_0(\varphi) = \{u \in \mathfrak{L}(E) \mid \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u\}.$$

En outre, on sait que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ donc en notant $q = \mathrm{id}_E - p$, $q \in E_0(\varphi)$. Et comme $p \neq \mathrm{id}_E$, $q \neq 0_{\mathfrak{L}(E)}$, donc $E_0(\varphi) \neq \{0_{\mathfrak{L}(E)}\}$. Ainsi, 0 est bien valeur propre de φ.

De même,

$$\begin{aligned}
u \in E_1(\varphi) &\iff \varphi(u) = u\\
&\iff u \circ p = u\\
&\iff \forall x \in E,\ u(p(x)) = u(x)\\
&\iff \forall x \in E,\ u(x - p(x)) = 0_E\\
&\iff \forall y \in \operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - p),\ u(y) = 0_E\\
&\iff \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} u.
\end{aligned}$$

Or $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p$. Donc

$$E_1(\varphi) = \{u \in \mathfrak{L}(E) \mid \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u\}.$$

On voit que $p \in E_1(\varphi)$, et puisque $p \neq 0_{\mathfrak{L}(E)}$, $E_1(\varphi) \neq \{0_{\mathfrak{L}(E)}\}$, donc 1 est bien valeur propre de φ.

125 — CCP

1. La matrice

$$A - I_4 = \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

est de rang 3. Comme $3 < 4$, $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

2. De plus, le sous-espace propre associé est $E_1(A) = \operatorname{Ker}(A - I_4)$ et d'après le théorème du rang, $\dim(E_1(A)) = 4 - 3 = 1$.

Les colonnes C_2 et C_3 de $A - I_4$ sont égales : on peut écrire

$$\begin{aligned}
C_2 = C_3 &\iff C_2 - C_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \underbrace{\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4\end{pmatrix}}_{A - I_4}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff (A - I_4)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_4) = E_1(A).$$

Comme $E_1(A)$ est une droite,

$$E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

3. Comme on a déjà une valeur propre, ne repartons pas dans la démarche habituelle du polynôme caractéristique.

Sur le même principe qu'au dessus, on voit que $\mathrm{rg}(A) = 3$, donc $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\dim(E_0(A)) = 1$. En outre, les deux colonnes extrêmes de A sont égales, donc en raisonnant comme à la question précédente

$$E_0(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit alors $\lambda \notin \{0,1\}$ une autre valeur propre éventuelle de A, et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$X \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = \lambda x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda x_4 \end{cases}$$

L'idée est de discuter selon λ l'existence de solutions non nulles à ce système. On pourrait (devrait...) utiliser un pivot, mais avec le paramètre λ, les calculs seront peut-être lourds. Avisons.

$$X \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^4 x_i = \lambda x_1 \\ x_1 + x_4 = (\lambda - 1)\, x_2 \\ x_3 - x_2 = \lambda (x_3 - x_2) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 0 = \lambda(x_4 - x_1) & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$,

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff \begin{cases} x_1 = x_4 & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ x_2 = x_3 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 2x_1 = (\lambda-1)\,x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = x_4,\ x_2 = x_3 \\ 2x_1 = (\lambda-1)\,x_2 \\ (\lambda+1)\,x_2 = \lambda x_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = x_4,\ x_2 = x_3 \\ 2x_1 = (\lambda-1)\,x_2 \\ 2(\lambda+1)\,x_2 = \lambda(\lambda-1)\,x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $x_2 = 0$, tous les x_i sont nuls et $X = 0$, ce qui n'est pas, donc $x_2 \neq 0$. Alors la dernière équation devient $\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$, dont les racines sont

$$\lambda_\varepsilon = \frac{3 + \varepsilon\sqrt{13}}{2} \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

Les espaces propres correspondants sont

$$E_{\lambda_\varepsilon}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \lambda_\varepsilon - 1 \\ 2 \\ 2 \\ \lambda_\varepsilon - 1 \end{pmatrix},\ \varepsilon = \pm 1.$$

Commentaire. A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Alors certaines étapes de la résolution auraient pu être abrégées.

126 — **CCP**

1. Par linéarité de la dérivation, φ est clairement linéaire. En outre, si $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(P'') \leqslant n-2$ donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant n - 2 + 2 = n$. Ainsi, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$ et pour tout $k \in [\![2,n]\!]$,

$$\begin{aligned} \varphi(X^k) &= (X-1)^2\, k\,(k-1)\, X^{k-2} \\ &= k\,(k-1)\,(X^k - 2\,X^{k-1} + X^{k-2}). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale les $k(k-1)$, où $k \in [\![0,n]\!]$. Donc

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{k\,(k-1),\ k \in [\![0,n]\!]\}.$$

3. $0 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ donc φ n'est pas injectif.

127

Polynôme caractéristique. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(x\,I_3 - A) = (-1)^3 \det(A - x\,I_3) \\ &= -\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -1-x & 2 & 2 \\ 1+x & 1-x & 2 \\ 0 & 2 & 3-x \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ &= -(1+x)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3-x & 4 \\ 0 & 2 & 3-x \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ &= (1+x)\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (1+x)\,((3-x)^2 - 8) \\ &= (x+1)\,(x - 3 - 2\sqrt{2}\,)\,(x - 3 + 2\sqrt{2}\,). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}\,\}$. En passant, χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc A est diagonalisable.

Espaces propres. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_{-1}(A) &\iff (A + I_3)\,X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff x + y = 0,\ z = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-1}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$X \in E_{3+2\sqrt{2}}(A) \iff (A-(3+2\sqrt{2})I_3)X = 0$$
$$\iff \begin{pmatrix} -2-2\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -2-2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -(1+\sqrt{2})x + y + z = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y + z = 0 \\ x + y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

On voit que $L_1 + L_2 = \sqrt{2}L_3$, donc on peut conserver les lignes L_2 et L_3 :

$$X \in E_{3+2\sqrt{2}}(A)$$
$$\iff \begin{cases} x + y - \sqrt{2}z = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y + z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y - \sqrt{2}z = 0 \\ -(2+\sqrt{2})y + (1+\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}z \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}z \end{cases}$$

Ainsi, $E_{3+2\sqrt{2}}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Les calculs pour déterminer $E_{3-2\sqrt{2}}(A)$ sont les mêmes, sauf que les termes en $\sqrt{2}$ sont changés en leur opposé. Alors $E_{3-2\sqrt{2}}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Diagonalisation. On peut donc écrire $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(-1, 3+2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

128 — **AM**

On trouve que 2 est valeur propre triple de A et

$$E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors A n'est pas diagonalisable. Mais elle est trigonalisable, car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit a l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Cherchons une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice T de a soit triangulaire. Sur la diagonale de cette matrice figurent les valeurs propres de a, donc celles de A :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut choisir $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = 0$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. Ce résultat hors-programme n'est pas à connaitre, et l'examinateur est censé donner l'indication lors de l'exercice. Ou alors, on mène les calculs qui suivent avec α, β, γ quelconques, et l'on voit ensuite que ce choix est possible.

Grâce à la première colonne de T, on voit que $a(e_1) = 2e_1$, donc on peut choisir

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la seconde colonne de T, on voit que $a(e_2) = 2e_2 + e_1$. Cherchons donc

$$e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tel que $Ae_2 = 2e_2 + e_1$. On résout

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'on choisit *une* solution

$$e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec la dernière colonne de T, cherchons e_3 tel que $a(e_3) = 2e_3 + e_2$: on résout

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et l'on choisit *une* solution

$$e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

129 — **MT**

Préambule. La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale. Si $a = g$, a est valeur propre quadruple, et sinon, a et g sont valeurs propres doubles.

Cas où $a = g$. La matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_4, si et seulement si elle est égale à aI_4, si et seulement si les autres coefficients de A sont tous nuls. En effet, seule I_4 est semblable à I_4.

Cas où $a \neq g$. Voici deux méthodes, entre autres.

Rang. La matrice A est diagonalisable si et seulement si ses espaces propres $E_a(A)$ et $E_g(A)$ sont des plans, autrement dit, si et seulement si les matrices $A - a\,I_4$ et $A - g\,I_4$ sont de rang 2. On voit que $\mathrm{rg}(A - a\,I_4) = 2$ si et seulement si $b = 0$ et $\mathrm{rg}(A - g\,I_4) = 2$ si et seulement si $h = 0$. Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $b = h = 0$.

Polynômes. Comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{a, g\}$, A est diagonalisable si et seulement si le polynôme

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} (X - \lambda) = (X - a)\,(X - g)$$

est annulateur de A. Et l'on voit que la matrice

$$(A - a\,I_4)\,(A - g\,I_4) = \begin{pmatrix} 0 & b\,(a-g) & b\,e & b\,f + c\,h \\ 0 & 0 & 0 & e\,h \\ 0 & 0 & 0 & h\,(g-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nulle si et seulement si $b = h = 0$.

130 — **IIE**

1. Notons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On voit que $\Phi^2 = \mathrm{id}_E$, donc Φ est une symétrie. Ses sous-espaces propres sont $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{id}_E) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, et $\mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{id}_E) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques. De plus, on sait que $E = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, χ_Φ est scindé sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{-1, 1\}$, et on a les multiplicités

$$m(1) = \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1),$$
$$m(-1) = \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1).$$

Enfin, puisque χ_Φ est scindé sur $\mathbb{R}$,

$$\det(\Phi) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi)} \lambda^{m(\lambda)} = (-1)^{n(n-1)/2},$$
$$\mathrm{Tr}(\Phi) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi)} \lambda\, m(\lambda) = n.$$

2. Oui, c'est une symétrie.

131 — **Navale**

Nommons (E) l'équation et posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Commençons par diagonaliser J : c'est possible car J est symétrique réelle. En nommant C_1 et C_2 ses colonnes, on voit que $C_1 = C_2$, autrement dit

$$C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Où l'on voit que $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(J)$ et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0(J).$$

De même, on voit que

$$C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète directement en

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $2 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(J)$ et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(J).$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(J) = \{0, 2\}$ et

$$E_0(J) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_2(J) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, $J = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0, 2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit M une solution de (E). Comme $J = M^2 + M$, J est un polynôme en M, donc J et M commutent. Cela entraine que les sous-espaces propres de J sont stables par M. Comme ce sont des droites, dire qu'elles sont stables par M signifie que ce sont des droites propres pour M. Autrement dit, la base de vecteurs propres de J trouvée plus haut est aussi une base de vecteurs propres de M. Alors M est diagonalisable, et dans la même base que J : il existe donc une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(a, b)$ telle que $M = P\,\Delta\,P^{-1}$.

On a $M^2 + M = J$, d'où $\Delta^2 + \Delta = D$, ou encore $a^2 + a = 0$ et $b^2 + b = 2$, c'est-à-dire $a \in \{-1, 0\}$ et $b \in \{-2, 1\}$. Donc, quatre matrices conviennent possiblement :

$$P\,\mathrm{diag}(-1, -2)\,P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$P\,\mathrm{diag}(-1, 1)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P\,\mathrm{diag}(0, -2)\,P^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P\,\mathrm{diag}(0, 1)\,P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et l'on vérifie sans peine qu'elles conviennent effectivement toutes les quatre.

Commentaire. On a en fait raisonné par analyse-synthèse : si M est solution de (E), alors c'est l'une des quatre ci-dessus ; et les quatre conviennent.

132 — **CCP**

On a $A^3 - 3\,A^2 + 2\,A = A\,(A - I_3)\,(A - 2\,I_3)$. Comme A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, A est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0, 1, 2\}$. Mais A n'est pas inversible donc $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$. Enfin, $\mathrm{Tr}(A) = 3$ est la somme des valeurs propres de A, qui sont donc forcément 0, 1 et 2. Ainsi, les matrices cherchées sont exactement les matrices semblables à $\mathrm{diag}(0, 1, 2)$.

133 — CS

1. Dans l'action de φ sur M, les coefficients de M ne bougent pas, sauf les quatre coins qui tournent d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Alors $\varphi^4 = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})}$. Le polynôme $X^4 - 1$ est donc annulateur de φ. Mais comme il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, on ne peut pas encore conclure.

On sait seulement que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$.

Soit $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = M$. Alors les coefficients de M sont arbitraires, sauf les coins qui vérifient $a = d = p = m$. Ainsi, M est déterminée par un coin et ses autres coefficients, donc $\dim E_1(\varphi) = 13$.

Soit $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = -M$. Alors les coefficients de M autres que ses coins sont nuls, et les coins vérifient $a = -d = p = -m$. Ainsi, M est déterminée par un coin donc $\dim E_{-1}(\varphi) = 1$.

Mais la somme de ces dimensions est $13 + 1 = 14 < 16$, donc φ n'est pas diagonalisable.

2. À proprement parler, on ne peut pas se demander si φ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car c'est un endomorphisme de l'espace $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ qui est *réel.*

Mais l'on peut considérer l'endomorphisme $\widetilde{\varphi}$ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ dont l'action est la même que celle de φ dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$. On a donc toujours $\widetilde{\varphi}^4 = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})}$. Le polynôme annulateur $X^4 - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc $\widetilde{\varphi}$ est diagonalisable.

134 — MP

On a $U_{n+1} = AU_n$, on posant

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par une récurrence immédiate, $U_n = A^n U_0$. Il reste à calculer A^n. Pour cela, diagonalisons A.

Les valeurs propres de A sont 1, $\lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\mu = \overline{\lambda}$. Donc, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$: il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, \lambda, \mu)$. Alors $A^n = PD^nP^{-1}$. Ainsi,

$$U_n = PD^nP^{-1}U_0.$$

Sans calculer P^{-1}, posons

$$V_0 = P^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Alors

$$U_n = PD^nV_0 = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\lambda^n \\ \gamma\mu^n \end{pmatrix}.$$

Nommons V_1, V_λ et V_μ les colonnes de P, qui représentent des vecteurs propres de A respectivement associés à 1, λ et μ. On voit donc que

$$U_n = \alpha V_1 + \beta\lambda^n V_\lambda + \gamma\mu^n V_\mu.$$

Autrement dit, les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont combinaisons linéaires des suites géométriques (1), (λ^n) et (μ^n).

Comme $|\lambda| = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$, $\lim \lambda^n = 0$; de même, $\lim \mu^n = 0$. Alors les suites (a_n), (b_n) et (c_n) ont des limites ℓ_a, ℓ_b et ℓ_c. Et en passant à la limite sur les coordonnées de la relation précédente, on peut même écrire

$$\begin{pmatrix} \ell_a \\ \ell_b \\ \ell_c \end{pmatrix} = \alpha V_1.$$

Le calcul explicite — et fastidieux — de P est donc inutile : il suffit de déterminer sa première colonne, autrement dit l'espace propre $E_1(A)$. En nommant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on voit que

$$C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce que l'on interprète en

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$E_1(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et l'on peut choisir

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela entraine que $\ell_a = \ell_b = \ell_c$. Nommons ℓ cette valeur commune.

Constatons en sommant les trois suites que pour tout n,

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n,$$

et donc

$$a_n + b_n + c_n = a + b + c,$$

et en passant à la limite,

$$3\ell = a + b + c.$$

En conclusion, les trois suites convergent vers

$$\ell = \tfrac{1}{3}(a + b + c).$$

135 — AM

Ce système différentiel s'écrit $Y' = AY$ où

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

On diagonalise A sans difficulté : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff Z' = DZ$$

où l'on a posé $Z = P^{-1}\,Y$. En notant
$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$
on résout :
$$\begin{aligned} Z' = D\,Z &\iff \begin{cases} z_1' = -z_1 \\ z_2' = z_2 \\ z_3' = z_3 \end{cases} \\ &\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \\ &\qquad \begin{cases} z_1(t) = \alpha\,e^{-t} \\ z_2(t) = \beta\,e^{t} \\ z_3(t) = \gamma\,e^{t}. \end{cases} \end{aligned}$$

En notant V_1, V_2 et V_3 les colonnes de P, puisque
$$Y = P\,Z = z_1\,V_1 + z_2\,V_2 + z_3\,V_3,$$
l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système est
$$\Big\{t \mapsto \alpha\,e^{-t}\,V_1 + \beta\,e^{t}\,V_2 + \gamma\,e^{t}\,V_3, (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\Big\},$$
autrement dit
$$\Big\{t \mapsto \alpha\,e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta\,e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\,e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\Big\}.$$