Corrigés des exercices de la quatorzième feuille

122

Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2).$$

Continuons dans $\mathbb{C}$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{3, 1+i, 1-i\}$ et on trouve

$$E_3(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ et } E_{1+i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1-2i\\2\\i\end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne refait pas les calculs. En effet, comme A est réelle, si $X \in E_{1+i}(A)$, $AX = (1+i)X$ donc en conjuguant, $A\overline{X} = (1-i)\overline{X}$, donc $\overline{X} \in E_{1-i}(A)$. Alors

$$E_{1-i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1+2i\\2\\-i\end{pmatrix}.$$

123 **CCP**

1. Comme la trace est linéaire, f est un endomorphisme de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $A \neq 0$, donc si $M \in \mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, $f(M) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$.

2. Comme $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$, $0 \in \mathrm{Sp}(f)$. En outre, $A \neq 0$ et $f(A) = \mathrm{Tr}(A)A$, donc $\mathrm{Tr}(A) \in \mathrm{Sp}(f)$. C'est bien une autre valeur propre car $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Comme $\mathrm{Ker}\, f$ est un hyperplan et que $A \notin \mathrm{Ker}\, f$, $E = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} \oplus \mathbb{C}A = E_0(f) \oplus E_{\mathrm{Tr}(A)}(f)$. Donc il n'y a pas d'autre valeur propre.

Commentaire. En passant, f est diagonalisable.

124 **CCP**

1. Si $p = \mathrm{id}_E$, pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = u$, donc $\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))}$, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}$ et $E_1(\varphi) = \mathfrak{L}(E)$.

2. Si $p = 0_{\mathfrak{L}(E)}$, pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$, donc $\varphi = 0_{\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(E))}$, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0\}$ et $E_0(\varphi) = \mathfrak{L}(E)$.

3. Supposons désormais que $p \notin \{0_{\mathfrak{L}(E)}, \mathrm{id}_E\}$: comme $p \circ p = p$, pour tout $u \in \mathfrak{L}(E)$, on a

$$\varphi \circ \varphi(u) = (u \circ p) \circ p = u \circ (p \circ p) = u \circ p = \varphi(u).$$

Donc $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Ainsi, φ est un projecteur de $\mathfrak{L}(E)$ et $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{0, 1\}$.

Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$. On a

$$\begin{aligned} u \in E_0(\varphi) &\iff \varphi(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)} \\ &\iff u \circ p = 0_{\mathfrak{L}(E)} \\ &\iff \forall x \in E,\ u(p(x)) = 0_E \\ &\iff \forall y \in \mathrm{Im}\, p,\ u(y) = 0_E \\ &\iff \forall y \in \mathrm{Im}\, p,\ y \in \mathrm{Ker}\, u \\ &\iff \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_0(\varphi) = \{u \in \mathfrak{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u\}.$$

En outre, on sait que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ donc en notant $q = \mathrm{id}_E - p$, $q \in E_0(\varphi)$. Et comme $p \neq \mathrm{id}_E$, $q \neq 0_{\mathfrak{L}(E)}$, donc $E_0(\varphi) \neq \{0_{\mathfrak{L}(E)}\}$. Ainsi, 0 est bien valeur propre de φ.

De même,

$$\begin{aligned} u \in E_1(\varphi) &\iff \varphi(u) = u \\ &\iff u \circ p = u \\ &\iff \forall x \in E,\ u(p(x)) = u(x) \\ &\iff \forall x \in E,\ u(x - p(x)) = 0_E \\ &\iff \forall y \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p),\ u(y) = 0_E \\ &\iff \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, u. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p$. Donc

$$E_1(\varphi) = \{u \in \mathfrak{L}(E) \mid \mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u\}.$$

On voit que $p \in E_1(\varphi)$, et puisque $p \neq 0_{\mathfrak{L}(E)}$, $E_1(\varphi) \neq \{0_{\mathfrak{L}(E)}\}$, donc 1 est bien valeur propre de φ.

125 **CCP**

1. La matrice

$$A - I_4 = \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

est de rang 3. Comme $3 < 4$, $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

2. De plus, le sous-espace propre associé est $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_4)$ et d'après le théorème du rang, $\dim(E_1(A)) = 4 - 3 = 1$.

Les colonnes C_2 et C_3 de $A - I_4$ sont égales : on peut écrire

$$\begin{aligned} C_2 = C_3 &\iff C_2 - C_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4\end{pmatrix}}_{A - I_4}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &\iff (A - I_4)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_4) = E_1(A).$$

Comme $E_1(A)$ est une droite,

$$E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

3. Comme on a déjà une valeur propre, ne repartons pas dans la démarche habituelle du polynôme caractéristique.

Sur le même principe qu'au dessus, on voit que $\mathrm{rg}(A) = 3$, donc $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\dim(E_0(A)) = 1$. En outre, les deux colonnes extrêmes de A sont égales, donc en raisonnant comme à la question précédente

$$E_0(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit alors $\lambda \notin \{0, 1\}$ une autre valeur propre éventuelle de A, et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé :

$$X \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = \lambda x_2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = \lambda x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda x_4 \end{cases}$$

L'idée est de discuter selon λ l'existence de solutions non nulles à ce système. On pourrait (devrait...) utiliser un pivot, mais avec le paramètre λ, les calculs seront peut-être lourds. Avisons.

$$X \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^4 x_i = \lambda x_1 \\ x_1 + x_4 = (\lambda - 1) x_2 \\ x_3 - x_2 = \lambda (x_3 - x_2) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 0 = \lambda (x_4 - x_1) & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

Comme $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$,

$$X \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} x_1 = x_4 & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ x_2 = x_3 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 2 x_1 = (\lambda - 1) x_2 \\ 2 x_1 + 2 x_2 = \lambda x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_4, \ x_2 = x_3 \\ 2 x_1 = (\lambda - 1) x_2 \\ (\lambda + 1) x_2 = \lambda x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_4, \ x_2 = x_3 \\ 2 x_1 = (\lambda - 1) x_2 \\ 2 (\lambda + 1) x_2 = \lambda (\lambda - 1) x_2. \end{cases}$$

Si $x_2 = 0$, tous les x_i sont nuls et $X = 0$, ce qui n'est pas, donc $x_2 \neq 0$. Alors la dernière équation devient $\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$, dont les racines sont

$$\lambda_\varepsilon = \frac{3 + \varepsilon\sqrt{13}}{2} \text{ où } \varepsilon = \pm 1.$$

Les espaces propres correspondants sont

$$E_{\lambda_\varepsilon}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \lambda_\varepsilon - 1 \\ 2 \\ 2 \\ \lambda_\varepsilon - 1 \end{pmatrix}, \ \varepsilon = \pm 1.$$

Commentaire. A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Alors certaines étapes de la résolution auraient pu être abrégées.

126 — **CCP**

1. Par linéarité de la dérivation, φ est clairement linéaire. En outre, si $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(P'') \leqslant n - 2$ donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant n - 2 + 2 = n$. Ainsi, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $\varphi(1) = \varphi(X) = 0$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned} \varphi(X^k) &= (X - 1)^2 k (k - 1) X^{k-2} \\ &= k (k - 1) (X^k - 2 X^{k-1} + X^{k-2}). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale les $k(k-1)$, où $k \in [\![0, n]\!]$. Donc

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{k (k - 1), \ k \in [\![0, n]\!]\}.$$

3. $0 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ donc φ n'est pas injectif.