Quinzième feuille d'exercices

Espaces préhilbertiens

136 — MP

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geqslant \frac{2}{n\,(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2.$$

137 — WP

Soit E l'espace des suites réelles bornées.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$,

$$(u \,|\, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n\, v_n}{2^n}.$$

2. Soit F le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang.

a. Déterminer $F^{\perp}$.

b. F admet-il un supplémentaire orthogonal ?

138 — CCP

Calculer de manière géométrique

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - a\,x - b)^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

À cette fin, on introduira dans $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire défini par

$$(f \,|\, g) = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

139 — WP

Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel. Trouver le supplémentaire orthogonal de $H = \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$. En déduire $d(M, H)$ pour $M \in E$.

140 — MT18

Dans un espace préhilbertien réel E, soit une famille orthonormée $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x \,|\, e_i)^2.$$

Montrer que (e) est une base orthonormée de E.

141 — CS

Considérons $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$(P \,|\, Q) = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t,$$

et l'application δ définie par $\delta(P) = P(0)$.

1. Montrer l'existence d'un unique $\Omega \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\delta(P) = (\Omega \,|\, P)$.

2. Montrer que ce résultat est faux dans $\mathbb{R}[X]$.

142 — MP18

Soient $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \ldots, f_n) \in E^n$.

1. Supposons $(f_1, \ldots, f_n)$ libre. Montrer que

$$\forall M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \exists (h_1, \ldots, h_n) \in E^n,$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} = \textstyle\int_0^1 h_i\, f_j.$$

2. Réciproquement, supposons que

$$\forall M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \exists (h_1, \ldots, h_n) \in E^n,$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} = \textstyle\int_0^1 h_i\, f_j.$$

Peut-on conclure que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre ?

143 — ENSEA

1. Dans l'espace $E = \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, montrer que l'on définit un produit scalaire en posant

$$(f \,|\, g) = \int_0^1 (f(t)\, g(t) + f'(t)\, g'(t))\, \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que les ensembles

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$$
$$\text{et } G = \{f \in E \mid f'' = f\}$$

sont des espaces supplémentaires orthogonaux.

3. Déterminer la projection orthogonale sur G d'un élément f de E.

4. Soient α et β deux réels. On pose

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta\}.$$

Déterminer

$$m_{\alpha,\beta} = \inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\, \mathrm{d}t.$$