

Corrigés des exercices de la quinzième feuille

136 ————— **MP**

Dans $\mathbb{R}^{n-1}$ euclidien usuel, soient $x = (x_p)$ et $y = (y_p)$ définis par $x_p = \frac{\sqrt{p}}{n-p}$ et $y_p = \sqrt{p}$. Alors, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{p=1}^{n-1} x_p y_p \right)^2 \leq \left(\sum_{p=1}^{n-1} x_p^2 \right) \left(\sum_{p=1}^{n-1} y_p^2 \right)$$

$$\iff \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2 \leq \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \right) \left(\sum_{p=1}^{n-1} p \right)$$

où l'on reconnaît l'inégalité demandée avec

$$\sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

137 ————— **WP**

1. Pour commencer, pour u et v dans E , la série converge bien, car u et v sont bornées et la série géométrique $\sum 2^{-n}$ converge absolument.

$(\cdot | \cdot)$ est symétrique, par commutativité du produit des réels.

$(\cdot | \cdot)$ est linéaire à droite, par distributivité du produit sur la somme dans $\mathbb{R}$, puis par linéarité de la somme des séries convergentes. Donc par symétrie, $(\cdot | \cdot)$ est aussi linéaire à gauche.

Enfin, $(\cdot | \cdot)$ est défini positif. En effet, pour $u \in E$:

$$(u | u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{2^n} \geq 0.$$

Et si $(u | u) = 0$, comme il s'agit d'une somme de réels positifs, ces réels sont tous nuls : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = 0$, donc $u_n = 0$ et $u = 0$.

Ainsi, $(\cdot | \cdot)$ est bien un produit scalaire.

2.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ la suite qui comporte un 1 en position n , en commençant à compter à la position 0 — comme en python :-). On voit que $F = \text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Alors, si $v \in F^\perp$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \perp e_n$, donc $v_n = 0$. Ainsi $v = 0$ et $F^\perp = \{0\}$.

Commentaire. On aura reconnu que $F = \mathbb{R}[X]$.

2.b. Il s'ensuit que $F \oplus F^\perp = F \subsetneq E$, donc F n'a pas de supplémentaire orthogonal, car le seul possible est $F^\perp$, qui n'est pas supplémentaire de F .

138 ————— **CCP**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} dx$$

(on vérifie aisément que c'est un produit scalaire).

Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$. Alors la borne inférieure cherchée représente le carré de la distance de X^2 à F , donc elle est bien définie.

En appliquant le procédé de Schmidt à la base canonique $(1, X)$ de F , on trouve qu'une base orthonormée de F est (P_0, P_1) avec $P_0 = 1$ et $P_1 = X - 1$. Alors, la borne cherchée vaut

$$d^2(X^2, F) = \|X^2\|^2 - (P_0 | X^2)^2 - (P_1 | X^2)^2$$

$$= 24 - 4 - 16 = 4.$$

139 ————— **WP**

Tr est une forme linéaire non nulle donc H est un hyperplan de E et son orthogonal est une droite.

Pour A et B dans E , $(A | B) = \text{Tr}(A^T B)$. Soit $M \in E$: $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(I_n^T M) = (I_n | M)$, donc $M \in H$ si et seulement si $(I_n | M) = 0$, donc $H^\perp \subset \mathbb{R} I_n$, et comme $H^\perp$ est une droite, $H^\perp = \mathbb{R} I_n$.

Soit $M \in E$: il existe un unique $(\lambda, N) \in \mathbb{R} \times H$ tel que $M = \lambda I_n + N$. Alors $\text{Tr}(M) = \lambda \text{Tr}(I_n) = n\lambda$. Donc $d(M, H) = \|\lambda I_n\| = n|\lambda| = |\text{Tr}(M)|$.

140 ————— **MT18**

Soit $F = \text{Vect}(e) : (e)$ est une base orthonormée de F . Comme F est de dimension finie, la projection orthogonale p_F sur F est définie. Soit $x \in E$:

$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2 = 0$$

donc $x = p_F(x) \in F$. Ainsi, $F = E$ et (e) est une base orthonormée de E . Et au passage, E est euclidien.

141 ————— **CS**

1. D'après le théorème de représentation, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et que δ est clairement une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\exists ! \Omega \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta(P) = (\Omega | P).$$

2. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\Omega \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\delta(P) = (\Omega | P)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aurait alors

$$|\delta(P)| = |(\Omega | P)| \leq \|\Omega\| \|P\|.$$

Nous aboutirons à une contradiction si nous trouvons des polynômes P_n tels que $\|P_n\|$ soit bornée avec n , et pas $\delta(P_n) = P_n(0)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = \sqrt{2n+1} (1-X)^n$, de sorte que

$$\|P_n\| = \int_0^1 P_n^2(t) dt = \int_0^1 (2n+1) (1-t)^{2n} dt = 1$$

et $P_n(0) = \sqrt{2n+1}$. On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2n+1} \leq \|\Omega\|$, ce qui est impossible. Donc il n'existe aucun $\Omega \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\delta(P) = (\Omega | P)$.

142

MP18

1. Tout d'abord, on reconnaît le produit scalaire usuel sur E , $(f|g) = \int_0^1 f g$.

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Cherchons $(h_1, \dots, h_n) \in E^n$ tel que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{ij} = (h_i | f_j)$. Comme $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, limitons-nous à l'espace $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, qui est donc de dimension n . Cela revient à prouver que M admet un antécédent par l'application

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} F^n & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ (h_1, \dots, h_n) & \longmapsto & ((h_i | f_j))_{1 \leq i, j \leq n} \end{array} \right.$$

Prouvons donc que Φ est surjective. Comme $\dim(F^n) = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$ et que Φ est clairement linéaire, cela revient à montrer qu'elle est bijective ou aussi injective.

Soit $(h_1, \dots, h_n) \in \text{Ker}(\Phi)$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(h_i | f_j) = 0$, donc $h_i \perp f_j$. Donc $h_i \perp F$ et $h_i \in F^\perp$. Comme $F \cap F^\perp = \{0\}$, $h_i = 0$.

Ainsi, Φ est injective, donc bijective et surjective, ce que l'on voulait.

2. L'hypothèse de l'énoncé signifie que l'application

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ (h_1, \dots, h_n) & \longmapsto & ((h_i | f_j))_{1 \leq i, j \leq n} \end{array} \right.$$

est surjective.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j = 0$. Considérons un antécédent $(h_1, \dots, h_n) \in E^n$ de I_n par Ψ : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(h_i | f_j) = \delta_{ij}$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(h_i \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right. \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (h_i | f_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i. \end{aligned}$$

Ainsi, toute combinaison linéaire nulle de $(f_1, \dots, f_n)$ est triviale, et la famille est libre.

143

ENSEA

1. Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et linéarité de la dérivation et de l'intégrale, $(\cdot | \cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire. Soit $f \in E$. Par positivité de l'intégrale, $(f | f) = \int_0^1 (f^2 + f'^2) \geq 0$. Enfin, si $(f | f) = 0$, comme la fonction $f^2 + f'^2$ est positive et continue sur $[0, 1]$, elle y est nulle. Comme $f^2 + f'^2 = 0$ et que $f^2 \geq 0$ et $f'^2 \geq 0$, on a donc $f^2 = f'^2 = 0$: en particulier, $f = 0$.

Ainsi, $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc c'est un produit scalaire euclidien.

2. SOUS-ESPACES VECTORIELS. Commençons par montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E .

Considérons les deux applications

$$\delta_0 : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0) \text{ et } \delta_1 : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1).$$

Ce sont clairement des formes linéaires non nulles de E , donc $F = \text{Ker } \delta_0 \cap \text{Ker } \delta_1$ est bien un sous-espace vectoriel de E , comme intersection de deux hyperplans de E .

Et bien-sûr, G est un plan, comme espace des solutions sur $[0, 1]$ d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2. Et même, classiquement, $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$, en notant

$$g_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^t \text{ et } g_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t}.$$

ORTHOGONALITÉ. Montrons que $F \perp G$. Soient $f \in F$ et $g \in G$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} (f | g) &= \int_0^1 f g + \int_0^1 f' g' \\ &= \int_0^1 f g + [f g']_0^1 - \int_0^1 f g'' = 0. \end{aligned}$$

En effet, $[f g']_0^1 = 0$ car $f \in F$ et $f(0) = f(1) = 0$. Et $\int_0^1 f g = \int_0^1 f g''$ car $g \in G$ et $g'' = g$. Donc F et G sont bien orthogonaux.

Commentaire. Comme $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$, il aurait suffi de montrer que pour tout $f \in F$, $f \perp g_1$ et $f \perp g_2$.

SOMME DIRECTE. Enfin, montrons que $E = F \oplus G$ par analyse-synthèse. Soit $h \in E$.

Analyse. Supposons que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors $h(0) = g(0)$ et $h(1) = g(1)$, car $f(0) = f(1) = 0$. De plus, $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$, donc il existe un unique $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$. Alors

$$g(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = h(0), \quad g(1) = \alpha_1 e + \alpha_2 e^{-1} = h(1),$$

d'où l'on tire α_1 et α_2 . Alors,

$$g = \frac{h(0) - e h(1)}{1 - e^2} g_1 + \frac{h(0) - e^{-1} h(1)}{1 - e^{-2}} g_2,$$

et bien-sûr, $f = h - g$.

Synthèse. Considérons les fonctions

$$g = \frac{h(0) - e h(1)}{1 - e^2} g_1 + \frac{h(0) - e^{-1} h(1)}{1 - e^{-2}} g_2,$$

et $f = h - g$. Clairement, f et g sont dans E et $f + g = h$. En outre, $g \in \text{Vect}(g_1, g_2) = G$ et

$$f(0) = h(0) - \frac{h(0) - e h(1)}{1 - e^2} - \frac{h(0) - e^{-1} h(1)}{1 - e^{-2}} = 0,$$

$$f(1) = h(1) - \frac{h(0) - e h(1)}{1 - e^2} e - \frac{h(0) - e^{-1} h(1)}{1 - e^{-2}} e^{-1} = 0,$$

donc $f \in F$.

Conclusion. Par analyse-synthèse, $E = F \oplus G$.

CONCLUSION GÉNÉRALE. Et donc F et G sont des supplémentaires orthogonaux.

3. Soit $f \in E$. Grâce à la construction précédente, le projeté de f sur G parallèlement à F est

$$g = \frac{f(0) - e f(1)}{1 - e^2} g_1 + \frac{f(0) - e^{-1} f(1)}{1 - e^{-2}} g_2.$$

Et comme $F \perp G$, il s'agit bien du projeté orthogonal de f sur G .

BONUS. Il n'est donc pas nécessaire ici de chercher une base orthonormée de G . Mais on en a trouvé une quand-même. En effet, comme $g'_1 = g_1$ et $g'_2 = -g_2$,

$$(g_1 | g_2) = \int_0^1 (g_1 g_2 + g'_1 g'_2) = \int_0^1 (1 - 1) = 0.$$

Donc la famille $\left(\frac{g_1}{\|g_1\|}, \frac{g_2}{\|g_2\|}\right)$ est une base orthonormée de G . En outre, d'une part,

$$\|g_1\|^2 = \int_0^1 (g_1^2 + (g'_1)^2) = \int_0^1 2g_1^2 = e^2 - 1,$$

$$\|g_2\|^2 = \int_0^1 (g_2^2 + (g'_2)^2) = \int_0^1 2g_2^2 = 1 - e^{-2}.$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} (f | g_1) &= \int_0^1 (f g_1 + f' g'_1) = \int_0^1 (f g'_1 + f' g_1) \\ &= \left[f g_1 \right]_0^1 = f(1)e - f(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f | g_2) &= \int_0^1 (f g_2 + f' g'_2) = \int_0^1 (-f g'_2 - f' g_2) \\ &= \left[-f g_2 \right]_0^1 = f(0) - e^{-1} f(1). \end{aligned}$$

Où l'on voit alors que

$$\begin{aligned} g &= \frac{(f | g_1)}{\|g_1\|^2} g_1 + \frac{(f | g_2)}{\|g_2\|^2} g_2 \\ &= \left(f \left| \frac{g_1}{\|g_1\|} \right. \right) \frac{g_1}{\|g_1\|} + \left(f \left| \frac{g_2}{\|g_2\|} \right. \right) \frac{g_2}{\|g_2\|}, \end{aligned}$$

et l'on reconnaît l'expression habituelle du projeté orthogonal dans une base orthonormée de G .

4. Soit $h \in E_{\alpha, \beta}$. Avec ce qui précède, son projeté orthogonal sur G est

$$g = \frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} g_1 + \frac{\alpha - e^{-1}\beta}{1 - e^{-2}} g_2.$$

Constatons que ce projeté ne dépend pas de h : tous les $h \in E_{\alpha, \beta}$ se projettent sur ce même g . Toujours d'après les calculs précédents, $g(0) = h(0) = \alpha$ et $g(1) = h(1) = \beta$, donc $g \in E_{\alpha, \beta}$. Alors, la fonction $f = h - g$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$, donc $f \in F$. Alors $f \perp g$ car bien-sûr, $g \in G$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|h\|^2 = \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \geq \|g\|^2,$$

et bien-sûr l'inégalité est une égalité si $h = g$. Autrement dit, $\|g\|^2$ est un minorant de $\|h\|^2$ lorsque h décrit $E_{\alpha, \beta}$, lequel est atteint pour $h = g$. Cela signifie que ce minorant est un minimum. Donc

$$\begin{aligned} m_{\alpha, \beta} &= \inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt \\ &= \min_{h \in E_{\alpha, \beta}} \|h\|^2 = \|g\|^2. \end{aligned}$$

Or la famille (g_1, g_2) est orthogonale, donc

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \left(\frac{\alpha - e\beta}{1 - e^2} \right)^2 \|g_1\|^2 + \left(\frac{\alpha - e^{-1}\beta}{1 - e^{-2}} \right)^2 \|g_2\|^2 \\ &= \frac{(\alpha - e\beta)^2}{(1 - e^2)^2} (e^2 - 1) + \frac{(\alpha - e^{-1}\beta)^2}{(1 - e^{-2})^2} (1 - e^{-2}) \\ &= \frac{(\alpha - e\beta)^2}{e^2 - 1} + \frac{(\alpha - e^{-1}\beta)^2}{1 - e^{-2}}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$m_{\alpha, \beta} = \frac{(\alpha - e\beta)^2}{e^2 - 1} + \frac{(\alpha - e^{-1}\beta)^2}{1 - e^{-2}}.$$