

Seizième feuille d'exercices

ESPACES EUCLIDIENS

144 ————— **CCP16**

Soient E un espace euclidien et $a \in E \setminus \{0\}$. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $u : x \mapsto \alpha(x|a)a - x$ soit une isométrie.

145 —————

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E . Montrer que $F = \{x \in E \mid u(x) = x\}$ et $G = \{y - u(y) \mid y \in E\}$ sont supplémentaires orthogonaux.

146 —————

Soient un entier $n \geq 2$, $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel et $A \in E$. Montrer que l'application

$$\Phi_A : E \rightarrow E, M \mapsto AM^T A$$

est un endomorphisme autoadjoint de E .

147 ————— **CCP**

Que dire de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ?$$

148 ————— **CCP**

Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^T = -A$, alors $(I + A)$ est inversible et $M = (I + A)^{-1}(I - A)$ est orthogonale. Calculer $\det(M)$.

149 ————— **AM**

Considérons des matrices $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in O(n)$. Montrer que $\text{Tr}(AU) \leq \text{Tr}(A)$.

150 ————— **CCP**

Soient A une matrice réelle carrée et $B = AA^T - A^T A$. Montrer que si les valeurs propres de B sont toutes réelles et positives, alors $B = 0$.

151 ————— **CCP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire euclidien usuel, noté $(\cdot|\cdot)$.

1. Montrer que pour toute matrice carrée $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et tous vecteurs colonnes $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E ,

$$X^T M Y = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij} x_i y_j.$$

2. Montrer que pour tout $X \in E \setminus \{0\}$, $X^T X > 0$.

3. Soit une matrice symétrique réelle M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

— $\forall X \in E \setminus \{0\}, X^T M X > 0$;

— $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$;

— il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $M = P D P^T$;

— il existe une matrice inversible L telle que $M = L^T L$.

Désormais, considérons une matrice symétrique réelle M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie ces propriétés.

4. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$\forall (X, Y) \in E^2, (X|Y)_M = X^T M Y.$$

Que dire de $(\cdot|\cdot)_{I_n}$?

5. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E , orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$ et orthogonale pour $(\cdot|\cdot)_M$.