

Corrigés des exercices de la seizième feuille

144 ————— **CCP16**

D'abord, u est bien linéaire. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \|\alpha(x|a)a - x\|^2 \\ &= \alpha^2(x|a)^2\|a\|^2 - 2\alpha(x|a)(x|a) + \|x\|^2 \\ &= \alpha(\alpha\|a\|^2 - 2)(x|a)^2 + \|x\|^2. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2/\|a\|^2$, ce qui est possible car $a \neq 0$ donc $\|a\| \neq 0$, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ et u est une isométrie.

Si u est une isométrie, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$; en particulier, pour $x = a$, $\alpha(\alpha\|a\|^2 - 2)(a|a)^2 = 0$ d'où $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2/\|a\|^2$.

145 —————

Soit $x \in F$ et $y \in G$: il existe $z \in E$ tel que $y = z - u(z)$. Comme $u \in O(E)$, on a

$$\begin{aligned} (x|y) &= (x|z) - (x|u(z)) \\ &= (x|z) - (u(x)|u(z)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $F \perp G$.

On voit que $F = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $G = \text{Im}(u - \text{id}_E)$ donc $\dim F + \dim G = \dim E$.

Ainsi, F et G sont supplémentaires orthogonaux.

146 —————

Clairement $\Phi_A \in \mathfrak{L}(E)$. Soient P et Q dans E :

$$\begin{aligned} (P|\Phi_A(Q)) &= \text{Tr}(P^\top \Phi_A(Q)) = \text{Tr}(P^\top A Q^\top A) \\ &= \text{Tr}(A P^\top A Q^\top) = \text{Tr}(Q^\top A P^\top A) = (Q|\Phi_A(P)) \end{aligned}$$

et Φ_A est autoadjoint.

147 ————— **CCP**

Nommons u cet endomorphisme. M est symétrique : $M^\top = M$. Les colonnes de M forment une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , donc la matrice est orthogonale : $M^\top = M^{-1}$. Alors $M^{-1} = M$, donc $M^2 = I_3$ et u est une symétrie orthogonale. Enfin, l'ensemble des vecteurs invariants par u est donné par

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 3x \\ -2x + y - 2z = 3y \iff x + y + z = 0. \\ -2x - 2y + z = 3z \end{cases}$$

u est donc la symétrie orthogonale ou réflexion autour du plan d'équation $x + y + z = 0$.

148 ————— **CCP**

1. Montrer que $I + A$ est inversible revient à montrer que -1 n'est pas valeur propre de A .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre éventuelle de A et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A X = \lambda X$. D'une part, $X^\top A X = \lambda X^\top X$; d'autre part, $X^\top A X = (A^\top X)^\top X = -\lambda X^\top X$. Or $X^\top X > 0$ car $X \neq 0$, donc $\lambda = -\lambda$ et $\lambda = 0$. Ainsi, la seule valeur propre réelle possible de A est 0.

Donc $-1 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, $I + A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et la matrice M est bien définie.

2. On a

$$\begin{aligned} M^\top &= (I - A)^\top ((I + A)^{-1})^\top \\ &= (I - A^\top) ((I + A)^\top)^{-1} \\ &= (I + A)(I - A)^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} M^\top M &= (I + A)(I - A)^{-1}(I + A)^{-1}(I - A) \\ &= (I + A)((I + A)(I - A))^{-1}(I - A). \end{aligned}$$

Mais $I + A$ et $I - A$ commutent comme polynômes en A , donc

$$\begin{aligned} M^\top M &= (I + A)((I - A)(I + A))^{-1}(I - A) \\ &= (I + A)(I + A)^{-1}(I - A)^{-1}(I - A) = I \end{aligned}$$

et la matrice M est orthogonale.

3. Enfin,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det((I + A)^{-1}) \det(I - A) \\ &= \frac{\det(I - A)}{\det(I + A)} = \frac{\det(I - A)}{\det((I + A)^\top)} \\ &= \frac{\det(I - A)}{\det(I - A)} = 1 \end{aligned}$$

et M est la matrice d'une rotation.

149 ————— **AM**

Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in O(n)$. Il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Omega \in O(n)$ telles que $A = \Omega D \Omega^\top$. De plus, les λ_i sont positifs.

Voici deux preuves.

PREUVE DIRECTE. On a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D)$ et

$$\text{Tr}(AU) = \text{Tr}(\Omega D \Omega^\top U) = \text{Tr}(D \Omega^\top U \Omega).$$

La matrice $V = \Omega^\top U \Omega$ est orthogonale et l'on veut comparer $\text{Tr}(DV)$ à $\text{Tr}(D)$.

D'une part $\text{Tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

D'autre part, $\text{Tr}(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{ii}$ en notant $V = (v_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Comme les colonnes de V sont normées, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{1 \leq i \leq n} v_{ij}^2 = 1$, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_{ii}^2 \leq 1$ et donc $v_{ii} \leq |v_{ii}| \leq 1$.

Alors, $\text{Tr}(DV) \leq \text{Tr}(D)$, car les λ_i sont positifs.

PREUVE MOINS DIRECTE. Comme les λ_i sont positifs, on peut les écrire $\lambda_i = (\sqrt{\lambda_i})^2$, donc $D = \Delta^2$ en posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors,

$$\begin{aligned} A &= \Omega D \Omega^\top = \Omega \Delta^2 \Omega^\top = \Omega \Delta \Delta \Omega^\top \\ &= \Omega \Delta \Omega^\top \Omega \Delta \Omega^\top = M^\top M, \end{aligned}$$

en posant $M = \Omega \Delta \Omega^\top$. Alors, en utilisant le produit scalaire euclidien usuel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\text{Tr}(AU) = \text{Tr}(M^\top M U) = (M|MU) \leq \|M\| \|MU\|.$$

D'une part, $\|M\|^2 = \text{Tr}(M^\top M) = \text{Tr}(A)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|MU\|^2 &= \text{Tr}((MU)^\top MU) = \text{Tr}(U^\top M^\top MU) \\ &= \text{Tr}(M^\top MUU^\top) = \text{Tr}(A).\end{aligned}$$

Finalement, $\text{Tr}(AU) \leq \sqrt{\text{Tr}(A)}\sqrt{\text{Tr}(A)} = \text{Tr}(A)$.

150 ————— **CCP**

On voit que $B^\top = B$ et $\text{Tr}(B) = 0$. Alors B est symétrique réelle, donc diagonalisable. En particulier, la trace de B est la somme de ses valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités :

$$\text{Tr}(B) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} m(\lambda)\lambda = 0.$$

Mais comme ces valeurs propres sont réelles positives, elles sont nulles. Alors B est semblable à la matrice nulle, donc $B = 0$.

151 ————— **CCP**

1. Avec les notations de l'énoncé, les coordonnées de MY sont les

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}y_j, \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

donc

$$X^\top(MY) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n m_{ij}y_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}x_iy_j.$$

2. Oui, car $X^\top X = (X|X)$ et $(\cdot|\cdot)$ est défini positif.

3. Nommons (i), (ii), (iii) et (iv) les quatre propositions, dans l'ordre de l'énoncé.

SUPPOSONS (I). Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable. En particulier, son spectre est non vide. Soient $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$:

$$X^\top M X = \lambda X^\top X.$$

D'après (i), $X^\top M X > 0$ et d'après la question précédente, $X^\top X > 0$. Donc $\lambda > 0$ et $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, (i) \implies (ii).

SUPPOSONS (II). Comme M est symétrique réelle, il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et une matrice orthogonale P telles que $M = P D P^\top$. Sur la diagonale de D figurent les valeurs propres de M , qui sont strictement positives d'après (ii). Donc D est à coefficients strictement positifs. Ainsi, (ii) \implies (iii).

SUPPOSONS (III). En notant $D = \text{diag}(\lambda_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$ où $\lambda_i > 0$, posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i}, i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$, de sorte que $D = \Delta^2$. Alors

$$\begin{aligned}M &= P D P^\top = P \Delta^2 P^\top \\ &= (P \Delta)(\Delta P^\top) = (\Delta P^\top)^\top (\Delta P^\top) = L^\top L\end{aligned}$$

en posant $L = \Delta P^\top$. En outre, Δ et P sont inversibles, donc L l'est aussi. Ainsi, (iii) \implies (iv).

SUPPOSONS (IV). Soit $X \in E \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}X^\top M X &= X^\top L^\top L X = (L X)^\top (L X) \\ &= (L X | L X) = \|L X\|^2,\end{aligned}$$

en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $(\cdot|\cdot)$. Comme L est inversible et que $X \neq 0$, $L X \neq 0$, donc $\|L X\|^2 > 0$ et $X^\top M X > 0$. Ainsi, (iv) \implies (i).

FINALEMENT, les quatre propositions sont bien équivalentes.

4. Soient X et Y dans E : $(Y|X)_M = Y^\top M X$. Comme c'est un réel, il est égal à sa transposée, en le considérant comme une matrice de taille 1 :

$$\begin{aligned}(Y|X)_M &= (Y^\top M X)^\top = X^\top M^\top Y \\ &= X^\top M Y = (X|Y)_M,\end{aligned}$$

car M est symétrique. Donc $(\cdot|\cdot)_M$ est symétrique.

Soient de plus Z dans E et λ dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}(X + \lambda Y|Z)_M &= (X + \lambda Y)^\top M Z \\ &= (X^\top + \lambda Y^\top) M Z \\ &= X^\top M Z + \lambda Y^\top M Z \\ &= (X|Z)_M + \lambda(Y|Z)_M,\end{aligned}$$

donc $(\cdot|\cdot)_M$ est linéaire à gauche. Comme il est symétrique, il est aussi linéaire à droite, donc il est bilinéaire.

Enfin, si $X \neq 0$, $(X|X)_M = X^\top M X > 0$, car M vérifie (i). Donc $(\cdot|\cdot)_M$ est défini positif.

Finalement, $(\cdot|\cdot)_M$ est bien un produit scalaire euclidien.

Bien-sûr, on reconnaît que $(\cdot|\cdot)_{I_n} = (\cdot|\cdot)$.

5. Comme M est symétrique réelle, il existe une base de E orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$, $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_n)$, constituée de vecteurs propres pour M : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $M V_i = \lambda_i V_i$, où λ_i est la valeur propre associée à V_i .

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Comme \mathcal{B} est orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$, $(V_i|V_j) = \delta_{ij}$, en utilisant le symbole de Kronecker. Par ailleurs, si $i \neq j$,

$$(V_i|V_j)_M = V_i^\top M V_j = \lambda_j V_i^\top V_j = \lambda_j (V_i|V_j) = 0,$$

donc \mathcal{B} est une famille orthogonale pour $(\cdot|\cdot)_M$.

Finalement, \mathcal{B} est orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$ et orthogonale pour $(\cdot|\cdot)_M$.