

Dix-septième feuille d'exercices

ESPACES VECTORIELS NORMÉS – FIN

152

Montrer que $\text{Adh}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

153**CS**

Déterminer l'adhérence et l'intérieur de

$$\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

154**MP**

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

155**AM**

Étudier la suite (X_k) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $X_{k+1} = AX_k$, où

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

156**WP**

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Étudier la convergence dans $(E, \|\cdot\|_1)$, puis dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, de la suite de terme général

$$f_n : x \mapsto nx^n(1-x).$$

157**MP**

Trouver la limite de la suite de terme général

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}^n.$$