

Corrigés des exercices de la dix-septième feuille

152

Comme l'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Soit $\|\cdot\|$ l'une d'elles.

Soient $M \in E$ et χ_M son polynôme caractéristique. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, posons $M_\varepsilon = M - \varepsilon I_n$ de sorte que $\det(M_\varepsilon) = (-1)^n \chi_M(\varepsilon)$. Comme χ_M a un nombre fini de racines, $\det(M_\varepsilon) \neq 0$ pour ε suffisamment petit. Or $\|M - M_\varepsilon\| = \varepsilon \|I_n\|$ est petit avec ε . Alors, toute boule ouverte centrée en M rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, donc M est adhérent à $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\text{Adh}(\text{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

153

CS

ADHÉRENCE. On voit que $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par l'application déterminant. Or cette application est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{1\}$ est fermé, donc $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est fermé. Ainsi, $\text{Adh}(\text{SL}_n(\mathbb{R})) = \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

INTÉRIEUR. Moralement, $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est une surface de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, d'équation $\det(A) = 1$, donc on imagine que son intérieur est vide. Montrons-le, en prouvant qu'il existe des matrices arbitrairement proches de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant n'est pas 1.

Soit $M = (m_{ij}) \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$. En développant arbitrairement son déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$1 = \det(M) = \sum_{i=1}^n m_{i1} M_{i1},$$

en notant M_{i1} le cofacteur de m_{i1} . Il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $M_{i1} \neq 0$, sinon on aurait $\det(M) = 0$. Fixons un tel i .

Pour x réel, considérons $M_x = M + x E_{i1}$, où E_{i1} est la matrice élémentaire usuelle, contenant des 0 partout sauf à la ligne i dans la colonne 1. Considérons une norme arbitraire $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ — c'est égal puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. On a $\|M_x - M\| = |x| \|E_{i1}\|$. Donc quand x est proche de 0, M_x est proche de M . Autrement dit, pour tout $r > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $M_x \in B(M, r)$.

Explicitons $f(x) = \det(M_x)$. En notant, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, C_j les colonnes de M et E_j celles de E_{i1} , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \det(M + x E_{i1}) \\ &= \det(C_1 + x E_1, C_2, \dots, C_n) \\ &= \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \det(x E_1, C_2, \dots, C_n) \\ &= \det(M) + x \det(E_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

En développant le second déterminant par rapport à la première colonne, sachant que tous les termes de E_1 sont nuls sauf le terme i qui vaut 1, et comme tous les autres termes du déterminant sont ceux de M ,

$$\det(E_1, C_2, \dots, C_n) = M_{i1}.$$

Ainsi, $f(x) = 1 + x M_{i1}$. Donc f est un polynôme de degré 1 non constant, car $M_{i1} \neq 0$. Or $f(0) = 1$, donc pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 1$. Cela signifie que $M_x \notin \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Finalement, pour tout $r > 0$, il existe $M \in B(M, r)$ tel que $M \notin \text{SL}_n(\mathbb{R})$. Cela signifie que A n'est pas intérieur à $\text{SL}_n(\mathbb{R})$. Donc l'intérieur de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est bien vide, comme on l'avait imaginé.

154

MP

1. La forme de cette norme laisse présager qu'elle est associée à un produit scalaire. Plus précisément, l'application

$$(\cdot | \cdot) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'g'$$

est un produit scalaire euclidien sur E . En effet, c'est clairement une forme bilinéaire symétrique positive, et si $(f | f) = 0$, $f(0)^2 + \int_0^1 (f')^2 = 0$; comme les termes sont positifs, $f(0)^2 = \int_0^1 (f')^2 = 0$: alors $f(0) = 0$ et puisque $(f')^2$ est continue et positive, $f' = 0$, donc f est constante, d'où $f = 0$.

Commentaire. Mieux encore, si $f' = 0$ et $f(0) = 0$, on reconnaît un problème de Cauchy et $f = 0$, comme l'unique solution de ce problème de Cauchy.

Et l'on voit bien que N est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Commentaire. Si l'on ne sait pas « deviner » le produit scalaire, on le reconstitue avec une identité de polarisation : pour f et g dans E ,

$$(f | g) = \frac{1}{2} (N(f+g)^2 - N(f)^2 - N(g)^2).$$

Bien-sûr, si N n'est pas associée à un produit scalaire, l'application ainsi reconstituée ne sera pas un produit scalaire.

2. Soient $f \in E$ et $x \in [0, 1]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ donc

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'|. \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales,

$$\int_0^1 |f'| = \int_0^1 1 \cdot |f'| \leq \sqrt{\int_0^1 1^2} \sqrt{\int_0^1 f'^2} = \sqrt{\int_0^1 f'^2}.$$

D'autre part, en utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais sur les sommes,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \sqrt{\int_0^1 f'^2} \\ &= 1 \cdot |f(0)| + 1 \cdot \sqrt{\int_0^1 f'^2} \\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2} = \sqrt{2} N(f). \end{aligned}$$

Alors $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: considérons la fonction $f_n : x \mapsto x^n$.

D'une part, $\|f_n\|_\infty = 1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} N(f_n) &= \sqrt{\int_0^1 (n t^{n-1})^2 dt} \\ &= \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Alors, il est impossible de majorer N par $\|\cdot\|_\infty$, ce qui signifie que ces normes ne sont pas équivalentes.

155 ————— **AM**

Par une récurrence immédiate, pour tout k ,

$$X_k = A^k X_0.$$

Explicitons A^k . Écrivons $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Clairement, $J^2 = 3J$, donc si $p \geq 1$, $J^p = 3^{p-1}J$. Comme I_3 et J commutent,

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{4^k} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} J^p \\ &= \frac{1}{4^k} \left(I_3 + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} 3^{p-1} J \right) \\ &= \frac{1}{4^k} I_3 + \frac{1}{3 \cdot 4^k} \left(\sum_{p=1}^k \binom{k}{p} 3^p - 1 \right) J \\ &= \frac{1}{4^k} I_3 + \frac{((1+3)^k - 1)}{3 \cdot 4^k} J \\ &= \frac{1}{4^k} I_3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) J \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} J. \end{aligned}$$

Alors, par opérations usuelles sur les coefficients,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = \frac{1}{3} J X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. Il est également possible de diagonaliser A pour calculer ses puissances.

156 ————— **WP**

DANS $(E, \|\cdot\|_1)$. Pour tout $g \in E$,

$$\|g\|_1 = \int_0^1 |g(x)| dx.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

En notant f la fonction nulle, cela signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0,$$

ou encore que (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

DANS $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Il s'agit d'étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Convergence simple. Soit $x \in [0, 1]$.

Si $x = 1$, $(f_n(x))$ converge vers 0 car c'est la suite nulle.

Si $x \neq 1$, $(f_n(x))$ converge vers 0 par croissances comparées.

Ainsi, (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle, que l'on a notée f .

Convergence uniforme. On « voit » que

$$f_n \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \neq 0.$$

Cela signifie que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ vers f . Or f est la seule limite uniforme possible. Donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$. Autrement dit, (f_n) ne converge pas dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Commentaire. Si l'on ne voit pas la non convergence uniforme comme ci-dessus, on peut aussi calculer directement $\|f_n - f\|_\infty$, en étudiant f_n .

157 ————— **MP**

Puisque $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, la limite est à considérer pour chaque coordonnée. Soit donc à expliciter cette matrice. Sans difficulté, on diagonalise : en posant

$$D_n = \text{diag}\left(1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{on a } \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} = P D_n P^{-1},$$

$$\text{et } A_n = P D_n^n P^{-1}.$$

$$\text{Or } D_n^n = \text{diag}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

donc, par opérations usuelles de sommes et produits sur les coordonnées,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n &= P \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n^n \right) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(1) & \text{sh}(1) \\ \text{sh}(1) & \text{ch}(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$