

Dix-huitième feuille d'exercices

CALCUL DIFFÉRENTIEL

158 ————— **AM**

Étudier la continuité et la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction définie par $f(0, 0) = 0$ et si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

159 ————— **AM**

Déterminer les extrémums de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

160 ————— **CCP**

Soit f un endomorphisme autoadjoint défini positif de $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel.

1. Prouver qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, fixé. Montrer que l'application

$$g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Exprimer ses dérivées partielles en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer que g admet un unique point critique, c , qui est un minimum global.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

161 ————— **CCP**

Considérons la surface S d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Existe-t-il un point M de S tel qu'un vecteur normal au plan tangent à S en M soit colinéaire au vecteur de coordonnées $(1, 2, 3)$?

162 ————— **MP**

Soit $R > 0$. Déterminer la tangente en un point quelconque de la courbe définie par

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = Rx.$$

163 ————— **CCP**

1. Déterminer une équation du plan tangent P_0 à la surface d'équation $xyz = 1$ au point (x_0, y_0, z_0) .

2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur P_0 .