

Corrigés des exercices de la dix-huitième feuille

158 ————— **AM**

1. Étudions la continuité à l'aide des coordonnées polaires :

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta).$$

On voit que $f(x, y)$ tend vers $0 = f(0, 0)$ quand ρ tend vers 0, donc f est continue en $(0, 0)$. Bien-sûr, d'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Étudions l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$. Par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0.$$

Ensuite, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x(2x^3 + 3xy^2 + y^3)}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y(x^3 + 3x^2y + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Toujours avec les coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\ = \rho(2 \cos^3 \theta + 3 \cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\ = \rho(\cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta + 2 \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

159 ————— **AM**

D'abord, f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ses extrémums sont à chercher parmi ses points critiques, c'est-à-dire les points où ses dérivées partielles s'annulent simultanément. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12,$$

donc les points critiques sont $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$ et $(-2, -1)$. Calculons maintenant la hessienne de f :

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a $H_f(1, 2) = 6 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: son déterminant est négatif, donc ses valeurs propres sont de signes contraires, donc $(1, 2)$ n'est pas un extrémum de f . De même pour $(-1, -2)$.

Au contraire, les valeurs propres de $H_f(2, 1)$ sont strictement positives, donc $(2, 1)$ est un minimum local ; celles de $H_f(-2, -1)$ sont strictement négatives, donc $(-2, -1)$ est un maximum local.

160 ————— **CCP**

1. Oui, car f est autoadjoint. Nommons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une telle base orthonormée, où chaque e_k est associé à une valeur propre λ_k .

2. En notant $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ et $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 - \sum_{k=1}^n u_k x_k.$$

Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, comme polynôme de degré 2 en les x_k . De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = \lambda_k x_k - u_k.$$

Commentaire. À proprement parler, on aurait dû considérer les dérivées partielles de g par rapports aux coordonnées dans la base canonique, ce qui complique inutilement les calculs. Il est plus raisonnable de poursuivre les calculs dans la base $\mathcal{B}$.

3. POINT CRITIQUE. Par définition, un point critique annule la différentielle, donc toutes les dérivées partielles. Ainsi, $c = (c_1, \dots, c_n)$ vérifie le système

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k c_k - u_k = 0,$$

lequel admet une seule solution puisque $\lambda_k > 0$ pour tout k . Ainsi, g admet un unique point critique :

$$c = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{\lambda_k} e_k.$$

Commentaire. Constatons que

$$f(c) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{u_k}{\lambda_k} e_k = \sum_{k=1}^n u_k e_k = u,$$

d'où $c = f^{-1}(u)$, ce qui est licite car f est inversible, qui n'a pas 0 comme valeur propre.

MINIMUM. Voici deux approches.

Développement limité d'ordre 2.

Soit $h = \sum_{k=1}^n h_k e_k \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} g(c+h) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k (c_k + h_k)^2 \\ &\quad - \sum_{k=1}^n u_k (c_k + h_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k h_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^n u_k c_k - \sum_{k=1}^n u_k h_k \\ &= g(c) + \frac{1}{2} (f(h) | h), \end{aligned}$$

puisque $\lambda_k c_k = u_k$, pour tout k . Or pour tout h non nul, $(f(h) | h) > 0$, donc c est un minimum global strict.

Hessienne.

Clairement, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2}(x) = \lambda_k \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_\ell}(x) = 0 \text{ si } k \neq \ell,$$

donc la hessienne $H_g(c)$ de g en c est la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, laquelle a clairement son spectre dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $H_g(c) \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ et c est un minimum local strict. Mais comme c'est le seul point critique, c'est un minimum global.

161 ————— CCP

Considérons $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - 1$, de sorte que l'équation de S s'écrive $f(x, y, z) = 0$. En un point $M(x, y, z)$ de S , un vecteur normal au plan tangent est

$$\begin{aligned} \nabla f(M) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right) \\ &= 2(x, y, -z). \end{aligned}$$

S'il est colinéaire à $(1, 2, 3)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = -3\lambda$. Alors $f(x, y, z) = -4\lambda^2 - 1$: cette expression n'est jamais nulle donc M n'existe pas.

162 ————— MP

La courbe C est l'intersection des surfaces

$$\begin{aligned} S_1 : x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ \text{et } S_2 : x^2 + y^2 &= Rx. \end{aligned}$$

Soit $M_0 \in C$. Les plans tangents en M_0 à S_1 et à S_2 sont

$$\begin{aligned} TS_1 : x x_0 + y y_0 + z z_0 &= R^2, \\ TS_2 : x x_0 + y y_0 &= \frac{1}{2} R(x + x_0). \end{aligned}$$

Si $M_0 = (R, 0, 0)$, les deux plans sont égaux, et le cours ne permet pas de conclure. Sinon, les deux plans sont sécants, et le cours s'applique : la tangente à C en M_0 est l'intersection

$$TC_{M_0} = TS_1 \cap TS_2.$$

163 ————— CCP

1. Introduisons la fonction $f : (x, y, z) \mapsto xyz - 1$. Nommons $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. On voit que le gradient

$$\nabla f(M_0) = (y_0 z_0, z_0 x_0, x_0 y_0)$$

n'est pas nul, donc M_0 est un point régulier de S . Ainsi, le plan tangent $P_0 = TS_{M_0}$ a pour équation

$$(x - x_0)y_0 z_0 + (y - y_0)z_0 x_0 + (z - z_0)x_0 y_0 = 0,$$

ou encore $x/x_0 + y/y_0 + z/z_0 = 3$.

2. On cherche le projeté orthogonal $H(x, y, z)$ de O sur P_0 : $H \in P_0$ donc

$$x/x_0 + y/y_0 + z/z_0 = 3.$$

Le vecteur $\vec{N} = (1/x_0, 1/y_0, 1/z_0)$ est normal à P_0 : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{OH} = \lambda \vec{N}$ donc

$$x = \lambda/x_0, \quad y = \lambda/y_0, \quad z = \lambda/z_0.$$

En reportant dans l'équation de P_0 ,

$$\lambda \left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2} \right) = 3.$$

Alors, le point H s'écrit

$$H = \frac{3}{\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}} \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{1}{z_0} \right).$$