

Deuxième feuille d'exercices

SÉRIES NUMÉRIQUES

9 _____

Nature de la série $\sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$.

10 _____

Nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)! n^{2n}}{2^n n! (3n)!}$.

11 _____ **ENSEA**

Nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}.$$

12 _____ **AM**

Nature de la série $\sum \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 3n + 2}$.

13 _____ **TPE**

Si la série de terme général $u_n \geq 0$ converge, que dire de la série de terme général $\sqrt{u_n}/n$?

14 _____ **MP**

En remarquant que $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, calculer

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{2n+2} + \cdots$$

15 _____ **CCP**

Considérons la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2. Étudier la convergence de la suite $(2^n u_n)$.

16 _____ **CCP**

Considérons deux suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ telles que les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge absolument.

17 _____ **CCINP26**

Nature de la série $\sum \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$.

18 _____ **MP**

On pose

$$u_n = \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right),$$

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}} + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right).$$

Que dire des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$?