Corrigés des exercices de la deuxième feuille

9

La règle de d'Alembert s'applique sans difficulté : le quotient $|u_{n+1}/u_n|$ tend vers $\frac{3}{4} \in [0,1[$ donc la série converge absolument.

10

Le terme général u_n est non nul et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge car

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)^2(1+\frac{1}{n})^{2n}}{2(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2e^2}{27} < 1.$$

11 — ENSEA

Immédiatement, $u_n \geqslant 1$ et la série diverge.

12 — AM

Notons u_n le terme général :

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n^{3/2}} \ll \frac{1}{n^{5/4}}.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^{5/4}$ converge car $\frac{5}{4} > 1$, donc $\sum \ln n/n^{3/2}$ converge et $\sum u_n$ aussi.

13 — TPE

Elle converge car $0 \leqslant \dfrac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

14 — MP

Montrons que la série converge en étudiant les sommes partielles, ce qui permettra en même temps de calculer la somme. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons u_n le terme général de la série : on voit que $\lim u_n = 0$. Évaluons les sommes partielles d'indices pairs :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} u_k = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+2}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\left(\int_0^1 t^{2p}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{2p+1}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \int_0^1\left(\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p t^{2p} + \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p t^{2p+1}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 (1+t)\sum_{p=0}^{n-1}(-t^2)^p\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 (1+t)\,\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + (-1)^n\int_0^1\frac{(1+t)\,t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \frac{(1+t)\,t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} \to 0,$$

donc (S_{2n}) admet pour limite

$$\int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} = S.$$

En outre, $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ et $\lim u_{2n+1} = 0$ donc (S_{2n+1}) admet la même limite que (S_{2n}). Il s'ensuit que la suite (S_n) converge vers S, donc la série $\sum u_n$ converge et a pour somme S.

15 — CCP

1. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \,]0,1[$. En effet, $u_0 \in \,]0,1[$ et si $u_n \in \,]0,1[$, $u_{n+1} > 0$ et

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{2}(u_n + u_n^2) < \tfrac{1}{2}(u_n + u_n) = u_n < 1.$$

Donc la suite (u_n) est bornée. En passant, elle décroit strictement, car on a vu que $u_{n+1} < u_n$. Alors, elle converge vers $\ell \in [0,1[$. Par continuité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x+x^2)$, ℓ doit être l'un des points fixes de f, 0 ou 1 : alors $\ell = 0$, car 1 est strictement supérieur à (u_n) qui décroit. Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+u_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1,$$

donc d'après règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

2. Posons $v_n = 2^n\,u_n$. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n,$$

donc

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln(1+u_n) \sim u_n.$$

Comme la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de la série $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$, donc la suite $(\ln(v_n))$ converge. Par continuité de l'exponentielle, la suite (v_n) converge.

16 — CCP

Oui, par majoration, car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n\,v_n| \leqslant \tfrac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

17 — CCINP26

Notons u_n le terme général. Il semble que u_n change de signe, mais le théorème spécial des séries alternées parait difficile à mettre en œuvre. Alors, développons le terme général. Quand n est au voisinage de l'infini,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n+1} &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\\
&= n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}\,\frac{1}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{3\pi}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge absolument car $2 > 1$, donc la série $\sum \mathrm{O}(1/n^2)$ converge absolument donc converge. En outre, la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série alternée $\sum(-1)^n/n$ converge, donc aussi la série $\sum(-1)^n\,(3\pi)/(8n)$. Alors, comme u_n est somme de termes généraux de séries convergentes, la série $\sum u_n$ converge.

En revanche, puisque l'on voit que

$$|u_n| \sim \frac{3\pi}{8n}$$

et que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge, la série $\sum |u_n|$ diverge et $\sum u_n$ ne converge pas absolument. Donc elle est semi-convergente.

18 — **MP**

1. La série $\sum 1/n^{1/4}$ diverge, comme série de Riemann avec $\frac{1}{4} \leqslant 1$. Comme les termes suivants dans le développement de u_n sont négligeables devant $1/n^{1/4}$, la série $\sum u_n$ diverge.

2. Les séries $\sum(-1)^n/n^{1/4}$ et $\sum(-1)^n/n^{3/4}$ convergent, grâce au critère spécial des séries alternées. En revanche, la série $\sum 1/n^{3/4}$ diverge, donc on ne sait rien dire sur la convergence de la série $\sum \mathrm{o}(1/n^{3/4})$. Donc on ne peut pas conclure sur la convergence de la série $\sum v_n$.