Corrigés des exercices de la troisième feuille

19

Présentation. Nommons (E) cette équation. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Mais 0 est une singularité de (E) donc on résout sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.

Résolution de l'équation homogène. Pour $k \in \{1, 2\}$, l'ensemble des solutions sur I_k de l'équation homogène associée est

$$\left\{x \mapsto \alpha_k \exp\left(-\int \frac{dx}{x^2}\right) = \alpha_k\, e^{-1/x}, \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Résolution complète. D'autre part, on voit que $x \mapsto 1$ est solution évidente de (E), donc l'ensemble des solutions sur I_k de (E) est

$$\{x \mapsto 1 + \alpha_k\, e^{-1/x}, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

20 — CCP18

1. Avec la méthode habituelle, on trouve

$$\frac{1}{t\,(t^2-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2\,(t+1)} + \frac{1}{2\,(t-1)}.$$

2. Nommons (E) cette équation. Les fonctions $t \mapsto t\,(t^2-1)$, $t \mapsto 2$ et $t \mapsto t^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Mais -1, 0 et 1 sont les singularités de (E) donc on résout sur $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ ou $I_4 =]1, +\infty[$. Sur l'intervalle I_k, pour $k \in [\![1, 4]\!]$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{t \mapsto \alpha_k \exp\left(-\int \frac{2\,dt}{t\,(t^2-1)}\right) = \frac{\alpha_k\, t^2}{t^2-1}, \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Aucune solution particulière ne saute aux yeux : appliquons la méthode de variation de la constante. Posons

$$x(t) = \frac{\alpha_k(t)\, t^2}{t^2-1},$$

où α_k est dérivable sur I_k. On a donc

$$t\,(t^2-1)\,\frac{\alpha_k'(t)\, t^2}{t^2-1} = t^2,$$

d'où l'on choisit $\alpha_k(t) = \ln|t|$. Finalement, l'ensemble des solutions sur I_k de l'équation (E) est

$$\left\{t \mapsto \frac{(\alpha_k + \ln|t|)\, t^2}{t^2-1},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

21 — CCP

Présentation. Les fonctions $x \mapsto 2\,x\,(x+1)$ et $x \mapsto 3\,x + 4$ sont continues sur $\mathbb{R}$, mais la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ n'est définie et continue que sur $[-1, +\infty[$. En outre, les singularités de (E) sont 0 et -1 donc on étudie l'équation (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ ou $I_2 =]0, +\infty[$.

Équation homogène. Sur I_k, pour $k \in \{1, 2\}$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \alpha_k \exp\left(-\int \frac{3\,x+4}{2\,x\,(x+1)}\,dx\right) = \alpha_k\,\frac{\sqrt{x+1}}{x^2},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Variation de la constante. Considérons

$$\varphi : x \mapsto \sqrt{x+1}/x^2.$$

Sur I_k, on cherche les solutions de (E) sous la forme $y = \alpha_k\,\varphi$, où α_k est une fonction dérivable sur I_k. En reportant dans (E), on trouve

$$\begin{aligned} & 2\,x\,(x+1)\,\alpha_k'(x)\,\varphi(x) = 2\,x\,\sqrt{x+1} \\ \iff & \alpha_k'(x) = x^2/(x+1) \\ \iff & \alpha_k(x) = \tfrac{1}{2}\,x^2 - x + \ln(x+1) + \beta_k,\ \beta_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur I_k est

$$\left\{x \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\,x^2 - x + \ln(x+1) + \beta_k\right)\frac{\sqrt{x+1}}{x^2},\ \beta_k \in \mathbb{R}\right\}.$$

22

Équation homogène. L'équation caractéristique est (C) $r^2 + 6\,r + 9 = 0$, dont -3 est racine double. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée est donc

$$\left\{x \mapsto (\alpha\,x + \beta)\,e^{-3x},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Solution particulière. Comme le coefficient, -3, de l'exposant de l'exponentielle du second membre est racine double de (C), on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Q(x)\,e^x$ où $\deg Q = 2$, et l'on trouve $Q(x) = \frac{1}{2}\,x^2$, par exemple.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation complète est donc

$$\left\{x \mapsto \tfrac{1}{2}\,x^2\,e^{-3x} + (\alpha\,x + \beta)\,e^{-3x},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

23 — AM

Équation homogène. L'équation caractéristique est (C) $r^2 + 2\,r + 1 = 0$, dont -1 est racine double. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto (\alpha\,x + \beta)\,e^{-x},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Solution particulière. Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}\,x\,e^x - \frac{1}{2}\,x\,e^{-x}$. Donc grâce au théorème de superposition, cherchons séparément une solution particulière des deux équations

(E_1) $\qquad y'' + 2\,y' + y = \frac{1}{2}\,x\,e^x,$

(E_2) $\qquad y'' + 2\,y' + y = -\frac{1}{2}\,x\,e^{-x}.$

Comme 1 n'est pas racine de (C), on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $\psi_1(x) = (ax+b)e^x$, et on trouve $\psi_1(x) = \frac{1}{8}(x-1)e^x$.

En revanche, -1 est racine double de (C), donc on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $\psi_2(x) = Q(x)\,e^{-x}$ où $\deg Q = 3$, et l'on trouve $Q(x) = -\frac{1}{12}\,x^3$, par exemple.

Une solution particulière de (E) est $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{x \mapsto \tfrac{1}{8}(x-1)\,e^x - \tfrac{1}{12}\,x^3\,e^{-x} + (\alpha\,x+\beta)\,e^{-x},\quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

24 — CCP

Présentation. Nommons (E) cette équation. Sur $I = \,]1,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto 4$ et $x \mapsto x\,e^{-2x}/(x-1)^2$ sont continues.

Équation homogène. L'équation caractéristique est (C) $r^2 + 4r + 4 = 0$, qui admet -2 comme racine double. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est donc

$$\left\{x \mapsto (\alpha\,x+\beta)\,e^{-2x},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Solution particulière. Utilisons la méthode de variation de la constante. Puisque $x \mapsto e^{-2x}$ est une solution sur I de (H) qui ne s'annule jamais, cherchons une solution particulière sur I de (E) sous la forme $y : x \mapsto \alpha(x)\,e^{-2x}$ où α est une fonction deux fois dérivable. En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned}\alpha''(x) &= \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Comme on cherche une solution particulière de (E), intégrons en choisissant arbitrairement des constantes d'intégration nulles :

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= \ln(x-1) - \frac{1}{x-1},\\ \alpha(x) &= (x-1)\ln(x-1) - (x-1) - \ln(x-1)\\ &= (x-2)\ln(x-1) - x + 1.\end{aligned}$$

Donc une solution particulière sur I de (E) est

$$x \mapsto (x-2)\ln(x-1)\,e^{-2x} + (-x+1)\,e^{-2x}.$$

Et comme $x \mapsto (-x+1)e^{-2x}$ est solution sur I de (H), $x \mapsto (x-2)\ln(x-1)\,e^{-2x}$ est aussi une solution particulière sur I de (E).

Conclusion. Ainsi, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\left\{x \mapsto (x-2)\ln(x-1)\,e^{-2x} + (\alpha\,x+\beta)\,e^{-2x},\quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

25 — MP

Soit f une solution. Alors, f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable, et par récurrence, f est $\mathscr{C}^\infty$.

En dérivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(-x) = e^x$. Comme $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$, il s'ensuit que $f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x} = 2\operatorname{ch} x$. Alors il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{ch} x + \alpha\cos x + \beta\sin x.$$

En reportant dans l'équation du départ,

$$f'(x) + f(-x) = e^x + (\alpha+\beta)(\cos x - \sin x).$$

Donc on doit avoir $\alpha + \beta = 0$. Finalement, l'ensemble des solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \alpha(\cos x - \sin x),\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Commentaire. On aurait également pu résoudre en décomposant f en somme de ses parties paire et impaire. Mais c'est plus long.

26 — MP

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme il est à la fois dans l'intégrale et sur ses bornes, transformons l'écriture :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{\omega}\int_0^x (\sin(\omega\,x)\cos(\omega\,t)\\ &\qquad - \cos(\omega\,x)\sin(\omega\,t))\,f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\sin(\omega\,x)}{\omega}\int_0^x f(t)\cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t\\ &\quad - \frac{\cos(\omega\,x)}{\omega}\int_0^x f(t)\sin(\omega\,t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Les fonctions $c : x \mapsto \cos(\omega x)$ et $s : x \mapsto \sin(\omega x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $c f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction

$$C : x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x \cos(\omega\,t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{c(t)\,f(t)}{\omega}\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de $\frac{1}{\omega}\,c\,f$ nulle en 0, et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{\omega}\int_0^x s(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\psi = sC - cS$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi' = \omega\,c\,C + \tfrac{1}{\omega}\,s\,c\,f + \omega\,s\,S - \tfrac{1}{\omega}\,c\,s\,f = \omega\,(cC + sS).$$

On voit que ψ' est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi'' = -\omega^2\,s\,C + c^2\,f + \omega^2\,c\,S + s^2\,f = -\omega^2\,\psi + f.$$

La fonction ψ est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

Alors, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{\psi + \alpha\,c + \beta\,s,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$