Quatrième feuille d'exercices

Intégrales généralisées

27 — MP

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

28 — AM

Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

29 — AM

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x\,e^{-nx}}{e^x - e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

30 — ENS

Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-2)\,(3-x)}}$.

31 — TPE

Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1-ix)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

32

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^\alpha}.$$

33 — CCP

Nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$
$$v_n = (-1)^n \int_0^n e^{-n^2 t^2}\,\mathrm{d}t.$$

34 — CCP

Étudier l'intégrabilité sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

35 — AM

Calculer $\int_0^{\pi/2} \ln \tan x\,\mathrm{d}x$ (on posera $x = \frac{\pi}{2} - t$).

36 — MT

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

37 — CCP

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$ et

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$,

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

b) Montrer que $I_n \leqslant \dfrac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n$.

38 — CCP

Soit la fonction $f : t \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \,\dfrac{\sin t}{t}\right)$.

1. Calculer la limite en 0 de $t\,f(t)$.

2. La fonction f est-elle intégrable sur $]0,1]$?