

Corrigés des exercices de la quatrième feuille

27 ————— **MP**

L'intégrande f est continue sur $]0, 1[$. D'une part, pour t voisin de 0, $f(t) \sim -\ln t$ et la fonction $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$. D'autre part, pour t voisin de 1, $f(t) \sim (t-1)\ln(1-t) \rightarrow 0$ donc f est prolongeable par continuité en 1. Ainsi, f est intégrable sur $]0, 1[$ et l'intégrale existe.

28 ————— **AM**

CALCUL FORMEL. En posant $u = x^2$ et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \\ &= \left[\frac{1 - \cos u}{2\sqrt{u}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{4u^{3/2}} du. \end{aligned}$$

JUSTIFICATION. La fonction $g : u \mapsto (1 - \cos u)/u^{3/2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $g(u) \sim_0 \frac{1}{2}\sqrt{u}$ donc g est prolongeable par continuité en 0 et elle est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin, $g(u) \leq 2/u^{3/2}$. Comme $u \mapsto 1/u^{3/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, g aussi. Alors g est intégrable sur $]0, +\infty[$ et la dernière intégrale converge.

Pour des raisons analogues, le terme entre crochets a bien un sens. Il en découle que la seconde intégrale converge.

Pour finir, le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, donc la première intégrale converge.

Commentaire. Notons l'importance du choix d'une primitive : toute autre primitive de $u \mapsto \sin u$ que $u \mapsto 1 - \cos u$ conduit à un calcul qui n'a pas de sens, car les deux termes de l'intégration par parties divergent.

29 ————— **AM**

CONVERGENCE DE L'INTÉGRALE. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrande f_n est positive et continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $f_n(x) \sim_0 \frac{1}{2}$ donc f_n se prolonge par continuité en 0 et elle est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin, $f_n(x) \ll_{+\infty} e^{-x/2}$ et $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f_n aussi. Finalement, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

CALCUL DE LA LIMITE. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{2 \operatorname{sh} x} \leq \frac{e^{-nx}}{2}$$

$$\text{donc} \quad \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{2} dx = \frac{1}{2n}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 0.$$

30 ————— **ENS**

CONVERGENCE. L'intégrande f est continue sur $I =]2, 3[$. De plus, $f(x) \sim_2 (x-2)^{-1/2}$ et $x \mapsto (x-2)^{-1/2}$ est intégrable sur $]2, \frac{5}{2}]$, donc f aussi; et $f(x) \sim_3 (3-x)^{-1/2}$ donc f est intégrable sur $[\frac{5}{2}, 3[$. Finalement, f est intégrable sur I et $\int_I f$ converge.

CALCUL. Posons $x = \frac{5}{2} + \frac{t}{2}$: ce changement envoie $] -1, 1[$ sur $]2, 3[$, et il est licite car $\mathcal{C}^1$ et bijectif. On a

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} &= \int_{-1}^1 \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= [2 \operatorname{Arcsin} t]_{-1}^1 = \pi. \end{aligned}$$

31 ————— **TPE**

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $f : t \mapsto e^{-t(1-ix)}/\sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Et $|f(t)| = e^{-t}/\sqrt{t} \sim_0 1/\sqrt{t}$, où $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc f l'est aussi. Enfin, $|f(t)| \ll_{+\infty} e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f aussi. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale existe.

32 —————

La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$f_\alpha(x) \sim_0 \frac{1}{x^{\alpha-1}} \text{ et } f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2x^\alpha}$$

donc f_α est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si $\alpha < 2$, et sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

33 ————— **CCP**

1. D'abord, u_n est défini pour $n \geq 1$. La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(t) \ll_{+\infty} e^{-t}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Posons $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

On voit que $\sum u_n$ est alternée. D'une part, comme $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ croît donc la suite de terme général $\int_{n^2}^{(n+1)^2} f(t) dt = I - \int_0^{n^2} f(t) dt$ décroît. Ainsi, $(|u_n|)$ décroît, comme produit de suites positives et décroissantes. D'autre part, $|u_n| \leq I/n \rightarrow 0$. Donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

2. Dans v_n , posons $x = nt$:

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \int_0^{n^2} e^{-x^2} dx = \frac{(-1)^n I}{n} - u_n.$$

La série $\sum (-1)^n I/n$ converge grâce au critère spécial des séries alternées, et $\sum u_n$ converge, donc $\sum v_n$ converge.

34 ————— **CCP**

Nommons f la fonction, continue sur $]1, +\infty[$.

ÉTUDE SUR $]1, 2]$. Au voisinage de 1,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + o(x-1)}{(x-1)\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x-1}$ est intégrable sur $]1, 2]$, donc f l'est aussi.

ÉTUDE SUR $[2, +\infty[$. En $+\infty$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} \ll \frac{1}{x^{4/3}}.$$

Comme $\frac{4}{3} > 1$, la fonction $x \mapsto 1/x^{4/3}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$, donc f l'est aussi.

Finalement, f est intégrable sur $]1, +\infty[$.

35

—AM

CONVERGENCE. La fonction $f : x \mapsto \ln \tan x$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\ln \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \ln \frac{1}{\tan x} = -\ln \tan x,$$

donc $|f(\frac{\pi}{2} - x)| = |f(x)|$. Alors, il suffit d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0, \frac{\pi}{4}[$. Pour x proche de 0,

$$\begin{aligned} \ln \tan x &= \ln(x + O(x^3)) \\ &= \ln x + \ln(1 + O(x^2)) \sim \ln x, \end{aligned}$$

donc $|f(x)| \sim |\ln x|$. Comme $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$, f l'est sur $]0, \frac{\pi}{4}[$. Ainsi, l'intégrale converge.

CALCUL. De plus, l'égalité $f(\frac{\pi}{2} - x) = -f(x)$ montre que le graphe de f est symétrique autour du point $(\frac{\pi}{4}, 0)$, donc l'intégrale est nulle.

36

—MT

CONVERGENCE. La fonction $f : x \mapsto \sin^3 x / x^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, en 0, $f(x) \sim x$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin, en $+\infty$, $|f(x)| \leq 1/x^2$ où $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc f l'est aussi. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

CALCUL. On a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx.$$

Soit $a > 0$. On a

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx &= \int_a^{+\infty} \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{4x^2} dx \\ &= \frac{3}{4} \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{1}{4} \int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

À vrai dire, c'est ce découpage qui a motivé le passage à la limite ci-dessus, car si la borne du bas est 0, le découpage n'est pas possible. En posant $y = 3x$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2} dx = 3 \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx &= \frac{3}{4} \left(\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx - \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \right) \\ &= \frac{3}{4} \int_a^{3a} \frac{\sin x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Or $\sin(x)/x^2 \sim_0 1/x$, donc c'est sûrement le terme prépondérant dans le calcul. Alors on écrit

$$\begin{aligned} \int_a^{3a} \frac{\sin x}{x^2} dx &= \int_a^{3a} \frac{x + \sin x - x}{x^2} dx \\ &= \int_a^{3a} \frac{dx}{x} + \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2} dx \\ &= \ln 3 + \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Comme $(\sin x - x)/x^2 \sim_0 -x/6$, la fonction $x \mapsto (\sin x - x)/x^2$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2} dx = 0.$$

Finalement

$$I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{3}{4} \left(\ln 3 + \int_a^{3a} \frac{\sin x - x}{x^2} dx \right) = \frac{3}{4} \ln 3.$$

37

—CCP

1. Étudions rapidement la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Si $x < 0$, $f'(x) < 0$ et si $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, donc f décroît sur $\mathbb{R}_-$ puis croît sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, ce que l'on voulait.

VARIANTE ÉLÉGANTE. La fonction exponentielle est convexe donc son graphe est au dessus de ses tangentes. En particulier, comme la tangente en $(0, 1)$ est d'équation $y = x + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

En appliquant l'inégalité au réel $-x^2$, $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$. En l'appliquant au réel x^2 , $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, donc $e^{-x^2} \leq 1/(1 + x^2)$.

2.a. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et $e^{-x^2} \ll_{+\infty} e^{-x}$, où $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et I converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. I_n est l'intégrale sur un segment d'un polynôme donc elle converge.

Enfin, la fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$, $1/(1+x^2)^n \leq 1/(1+x^2)$, où $x \mapsto 1/(1+x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ comme dérivée positive de la fonction Arctangente qui est majorée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $x \mapsto 1/(1+x^2)^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et J_n converge.

2.b. D'après 1, en posant $u = \sqrt{n}t$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^n dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{n}} = \frac{I}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

De même,

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \geq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt = \frac{I}{\sqrt{n}}.$$

38

—CCP

1. Pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} t f(t) &= e^{\ln t} \exp \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \frac{\sin t}{t} \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \left(1 + \frac{\sin t}{t} \right) \right). \end{aligned}$$

Quand $t \rightarrow 0$,

$$\ln t \left(1 + \frac{\sin t}{t} \right) \sim 2 \ln t \ll \frac{1}{\sqrt{t}}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t \left(1 + \frac{\sin t}{t} \right) \right) = +\infty$$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} t f(t) = +\infty$.

2. Cela signifie que $f(t) \gg_0 1/t$. Or la fonction $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ donc la fonction f non plus.