

Cinquième feuille d'exercices

SÉRIES ENTIÈRES

39

Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum \frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n! (3n)!} z^n.$$

40

CCP

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{(nx)^n}{n!}$.**41**

CCP

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.**42**

CCP

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, où (a_n) est une suite décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et telle que $\sum a_n$ diverge.**43**

CCP

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 1}.$$

44

MP

Déterminer le développement en série entière de

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6).$$

45

AM

Déterminer le développement en série entière de

$$x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x.$$

46

CS

Déterminer le développement en série entière de

$$f : x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}.$$

47

CCP

Déterminer le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

48

CCP

Résoudre l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)x^n = 0$.**49**

MP

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ est développable en série entière et donner son rayon de convergence.
2. Donner son développement puis déterminer un équivalent en $+\infty$ de son coefficient a_{2n+1} .

50

CCP

Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de $\sum \operatorname{ch}(n) x^{3n+1}$.**51**

IIE

Soit θ un réel fixé.1. Calculer le rayon de convergence et la somme f de la série entière

$$\sum \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' - 2\cos(\theta)y' + y = 0$.3. Retrouver l'expression de f .**52**

CCP

Considérons la suite (a_n) définie par $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Donner le rayon de convergence et la somme de $\sum a_n x^n / n!$ **53**

CCP

On pose $f(0) = \frac{1}{2}$ et si $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.2. Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^1$.3. Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$? Si oui, que vaut $f^{(n)}(0)$?**54**

CCP

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n dx$.**55**

CCP

Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de $\sum x^n / (1 + 2 + \dots + n)$.**56**

CCP

Posons $f(0) = \frac{1}{2}$ et si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.2. Montrer qu'il en est de même de $1/f$.**57**

CCP

Considérons $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$, où $x \in \mathbb{R}$.1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.2. En déduire que f est développable en série entière. Préciser son développement en série entière et en déterminer le domaine de validité.3. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.**58**

AM

1. Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

2. La résoudre complètement.