Corrigés des exercices de la cinquième feuille

39

Sans difficulté, avec la règle de d'Alembert, $R = 27e^{-2}/2$.

Commentaire. Cet exercice est un contrexemple au théorème bien connu selon lequel, dans les exercices ou les problèmes, le rayon de convergence d'une série entière est toujours 1 ou $+\infty$:-)

40 — CCP

Posons $a_n = n^n/n!$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la règle de d'Alembert, puisque

$$|a_{n+1}/a_n| = (1 + 1/n)^n \to e,$$

le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = 1/e$.

41 — CCP18

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1/(3n)! \leqslant 1/n!$, donc le rayon de convergence cherché R est supérieur à celui de la série entière $\sum x^{3n}/n!$, lequel est $+\infty$ car on reconnait le développement en série entière de l'exponentielle évalué en x^3, qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $R = +\infty$.

42 — CCP

La série entière diverge pour $x = 1$, sans diverger grossièrement. Alors, $x = 1$ n'est ni dans la zone de convergence absolue, ni dans la zone de divergence grossière : il est sur le cercle d'incertitude et $R = 1$.

43 — CCP

D'abord, $1/(k^2+1) \sim 1/k^2$ et $\sum 1/k^2$ converge, donc a_n est bien défini. C'est le reste d'une série positive convergente, donc (a_n) tend vers 0.

Pour trouver le rayon de convergence R_a de $\sum a_n z^n$, cherchons à encadrer a_n sous la forme $|b_n| \leqslant |a_n| \leqslant |c_n|$. Nommons R_b le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ et R_c celui de $\sum c_n z^n$. On aura $R_b \geqslant R_a \geqslant R_c$. Voici trois encadrements différents.

Le naturel. Minorons a_n par son premier terme et majorons-le par la somme complète :

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} \leqslant a_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}.$$

Comme c_n est constant, R_c est le rayon de convergence de $\sum z^n$, donc $R_c = 1$. En outre $b_n \sim 1/n^2$ donc R_b est le rayon de convergence de $\sum z^n/n^2$, qui est aussi celui de $\sum z^n$, car $1/n^2$ est une fraction rationnelle en n. Donc $R_b = 1$. Alors $R_a = 1$.

L'astucieux. On majore $k^2 + 1 \leqslant k^2 + k = k(k+1)$, donc on minore

$$a_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

R_b est le rayon de convergence de $\sum z^n$ car $1/(n+1)$ est une fraction rationnelle en n, donc $R_b = 1$. De même, si $k > 1$ donc si $n \geqslant 1$, on minore $k^2+1 \geqslant k^2-k = k(k-1)$, donc on majore

$$a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $R_c = 1$ donc $R_a = 1$.

Le méthodique. Pour encadrer la somme d'une série, on pense à la comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto 1/(t^2+1)$ est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \leqslant a_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

De plus,

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} n = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

$$\text{et} \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $a_n \sim 1/n$ donc $R_a = 1$.

44 — MP

Dans un premier temps, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 - 5x + 6 = (2-x)(3-x).$$

Comme on veut développer f autour de 0, on a choisi des facteurs positifs autour de 0. Alors f est définie sur $D = \left]-\infty, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[$ et pour tout $x \in \left]-\infty, 2\right[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2-x) + \ln(3-x) \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \ln(1 - \tfrac{x}{2}) + \ln(1 - \tfrac{x}{3}). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \left]-2, 2\right[$, $|\frac{x}{2}| < 1$ et $|\frac{x}{3}| < 1$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{x}{2})^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{x}{3})^n}{n} \\ &= \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

Ce développement en série entière a pour rayon de convergence 2.

45 — AM

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch} x \cos x = \operatorname{ch} x \operatorname{ch}(ix) \\ &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch}((1+i)x) + \operatorname{ch}((1-i)x)) \\ &= \operatorname{Re}(\operatorname{ch}((1+i)x)) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^{2n} x^{2n}}{(2n)!}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2i)^n x^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p x^{4p}}{(4p)!}. \end{aligned}$$

Commentaire. On aurait aussi pu tout écrire avec des exponentielles, ou dériver la fonction quatre fois, ou même effectuer un produit de Cauchy.

46 — CS

Définition. Comme $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^2+t^4)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(t) \sim_{-\infty} 1/t^4$, elle est intégrable sur $]-\infty, x]$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f' = \varphi$.

Développement en série entière. Développons f' en série entière. On peut constater que $f'(x) = g(x^2)$ où $g : x \mapsto 1/(1+x+x^2)$. Il suffit alors de développer g. Voici trois méthodes différentes.

Première méthode. On voit que si $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}. \end{aligned}$$

Alors $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{6n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{6n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$

avec $a_{3p} = 1$, $a_{3p+1} = -1$ et $a_{3p+2} = 0$. Le rayon de convergence de cette série vaut bien-sûr 1.

Deuxième méthode. Cherchons un développement de la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, dont le rayon est R. Alors, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} 1 &= (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\ &= a_0 + (a_1 + a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) x^n, \end{aligned}$$

en effectuant des décalages convenables des indices. Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto 1$, on a donc $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0$. On voit alors que la suite définie par $a_{3p} = 1$, $a_{3p+1} = -1$ et $a_{3p+2} = 0$ est la seule solution. On retrouve les coefficients précédents.

Troisième méthode. On décompose la fraction en éléments simples sur $\mathbb{C}$, on développe chaque élément simple en série entière et on recompose le tout. Cette méthode est laissée en exercice.

Avec les coefficients définis ci-dessus, pour tout $x \in]-1, 1[$, sachant que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le rayon de cette série entière est bien-sûr 1.

47 — CCP

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$.

Et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

Comme produit de Cauchy, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{1+x} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

où $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Comme $|a_n| \to e$, le rayon de convergence de cette série entière est 1.

48 — CCP

$3n+1$ est une fraction rationnelle (un polynôme) en n, donc le rayon de convergence R de cette série entière vaut celui de $\sum x^n$: $R = 1$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1) x^n &= 3x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= 3x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) + \frac{1}{1-x} \\ &= 3x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+2x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Alors, l'équation admet $x = -\frac{1}{2}$ comme unique solution.

49 — MP

1. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en posant successivement $u = t^2$ et $u = -t^2$,

$$e^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \text{ et } e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Ainsi, les fonctions $t \mapsto e^{t^2}$ et $t \mapsto e^{-x^2}$ sont développable en série entière. Alors la primitive $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ l'est aussi. Par produit, la fonction f est développable en série entière autour de 0.

Enfin, le rayon de convergence de tous les développements en série entière évoqués est $+\infty$, donc celui de f est aussi $+\infty$.

2. Étant donnée l'approche précédente, on pourrait utiliser un produit de Cauchy. Procédons autrement.

D'une part, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction développable en série entière. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + e^{x^2} e^{-x^2} = 2x f(x) + 1.$$

Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2xy = 1$.

D'autre part, la fonction f est clairement impaire. Donc on peut écrire, pour tout x réel,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \text{ et } f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n}.$$

Il est plus commode d'écrire $a_n\, x^{2n+1}$ plutôt que $a_{2n+1}\, x^{2n+1}$, puisque les coefficients pairs sont tous nuls. En reportant dans l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\, a_n\, x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2\, a_n\, x^{2n+2} = 1 \\ \iff &\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\, a_n\, x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\, a_{n-1}\, x^{2n} = 1 \\ \iff & a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)\, a_n - 2\, a_{n-1})\, x^{2n} = 1. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1$, $a_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $(2n+1)\, a_n - 2\, a_{n-1} = 0$, soit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2n+1}\, a_{n-1} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{2}{2n-1}\, a_{n-2} \\ &= \cdots = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}\, a_0 = \frac{2^{2n}\, n!}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout x réel,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}\, n!}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}.$$

Enfin, pour tout entier n grand, grâce à la formule de Stirling,

$$\begin{aligned} a_n &\sim \frac{2^{2n}\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}}{\sqrt{2\pi\,(2n+1)}\,(2n+1)^{2n+1}\, e^{-(2n+1)}} \\ &\sim \frac{2^{2n}\, n^n\, e^{n+1}}{\sqrt{2}\, 2^{2n+1}\,(n+\frac{1}{2})^{2n+1}} \\ &\sim \frac{e^{n+1}\, n^n}{2\sqrt{2}\, n^{2n+1}\,(1+\frac{1}{2n})^{2n+1}} \\ &\sim \frac{e^{n+1}}{2\sqrt{2}\, n^{n+1}\, e} \sim \frac{e^n}{2\sqrt{2}\, n^{n+1}}. \end{aligned}$$

50 — CCP

RAYON DE CONVERGENCE. Utilisons la règle de d'Alembert, en gardant le x car la série est lacunaire : pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{\mathrm{ch}(n+1)\, x^{3n+4}}{\mathrm{ch}(n)\, x^{3n+1}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} e\,|x|^3.$$

Si $e\,|x|^3 < 1$, c'est-à-dire si $|x| < e^{-1/3}$, la série converge absolument.

Si $e|x|^3 > 1$, c'est-à-dire si $|x| > e^{-1/3}$, la série diverge grossièrement.

Par définition du rayon de convergence, $R = e^{-1/3}$.

SOMME. Soit $x \in \left]-R, R\right[$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{ch}(n)\, x^{3n+1} &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2}\, x^{3n} \\ &= \frac{x}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e\, x^3)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-1}\, x^3)^n\right) \\ &= \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1-e\, x^3} + \frac{1}{1-e^{-1}\, x^3}\right) \\ &= \frac{x\,(1-\mathrm{ch}(1)\, x^3)}{1-2\,\mathrm{ch}(1)\, x^3 + x^6}. \end{aligned}$$

51 — IIE

1. Pour tout $n \geqslant 0$, $|\sin(n\theta)/n!| \leqslant 1/n!$ donc le rayon de convergence cherché R est plus grand que celui de la série entière $\sum x^n/n!$, lequel vaut $+\infty$, donc $R = +\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n!}\, x^n\right) = \mathrm{Im}\left(\exp(x\, e^{i\theta})\right) \\ &= e^{x\cos(\theta)}\sin(x\sin\theta). \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{(n-1)!}\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\,\theta)}{n!}\, x^n,$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+2)\,\theta)}{n!}\, x^n.$$

Ainsi, $f''(x) - 2\cos(\theta)\, f'(x) + f(x)$ est la somme de la série entière de coefficient

$$\sin((n+2)\,\theta) - 2\cos(\theta)\sin((n+1)\,\theta) + \sin(n\theta) = 0,$$

et f vérifie l'équation différentielle donnée.

3. L'équation caractéristique de ladite équation est

$$r^2 - 2\cos(\theta)\, r + 1 = 0,$$

dont les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Donc f s'écrit

$$f : x \mapsto e^{x\cos(\theta)}(\alpha\cos(x\sin\theta) + \beta\sin(x\sin\theta))$$

où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = \sin\theta$, donc $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Et l'on retrouve que

$$f : x \mapsto e^{x\cos(\theta)}\sin(x\sin\theta).$$

52 — CCP

RAYON DE CONVERGENCE. La suite (a_n) vérifie une récurrence double d'équation caractéristique $r^2-2r+1 = 0$, dont 1 est racine double. Alors $a_n = \alpha + \beta\, n$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Sans difficulté, $a_n = a_0 + n\,(a_1 - a_0)$.

Comme a_n est un polynôme en n, le rayon de convergence cherché est le même que celui de $\sum x^n/n!$, c'est-à-dire $+\infty$.

SOMME. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}\, x^n &= a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} + (a_1-a_0)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= a_0\, e^x + (a_1-a_0)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} \\ &= (a_0 + (a_1-a_0)\, x)\, e^x. \end{aligned}$$

53 — CCP

1. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$, par opérations usuelles. Pour $x \neq 0$ proche de 0,

$$f(x) = \frac{1-(1-\frac{1}{2}\, x^2 + \mathrm{o}(x^3))}{x^2} = \tfrac{1}{2} + \mathrm{o}(x).$$

Alors $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$ et f est continue en 0. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. À vrai dire, on a écrit un développement limité de f en 0 à l'ordre 1. Cela signifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

Comme f est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$ proche de 0,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{2(1-\cos x)}{x^3} \\ &= \frac{x\sin x - 2(1-\cos x)}{x^3} \\ &= \frac{x(x+\mathrm{o}(x^2)) - x^2 + \mathrm{o}(x^3)}{x^3} = \mathrm{o}(1). \end{aligned}$$

Alors $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0 et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \neq 0$. En développant le cosinus en série entière,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}, \end{aligned}$$

car $(-1)^{n+2} = (-1)^n$. En outre,

$$f(0) = \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{0^{2n}}{(2n+2)!}.$$

Alors, f est développable en série entière autour de 0, avec un rayon de convergence de $+\infty$. En particulier, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(2p+1)}(0) = 0$ et

$$f^{(2p)}(0) = \frac{(2p)!\,(-1)^p}{(2p+2)!} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p+2)}.$$

54 — **CCP**

Grâce aux développements en série entière usuels,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \big[-\ln(1-x)\big]_0^{1/2} \\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1/2)^n}{n}. \end{aligned}$$

Où l'on retrouve l'égalité annoncée.

55 — **CCP**

Rayon de convergence. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$a_n = \frac{1}{1+2+\ldots+n} = \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}.$$

Alors, $\sum a_n\,x^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n/n^2$. Comme $1/n^2$ est une fraction rationnelle en n, cette dernière a même rayon de convergence que $\sum x^n$, c'est-à-dire 1. Ainsi, $\sum a_n\,x^n$ a pour rayon de convergence 1.

Somme. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)}\,x^n \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)x^n \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

La scission est permise car les deux nouvelles séries entières ont aussi pour rayon de convergence 1. On a bien-sûr $f(0) = 0$. Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\ln(1-x) - \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -2\ln(1-x) - \frac{2}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - x\right) \\ &= 2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x)\right). \end{aligned}$$

56 — **CCP**

1. Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} - 1 - x\right) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

En outre, cette somme vaut $\frac{1}{2}$ en 0, donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. Si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors $1/f$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Prouvons-le, de deux façons différentes.

Étude directe. Le numérateur $N : x \mapsto e^x - 1 - x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $N'(x) = e^x - 1$ et $N''(x) = e^x$. Comme $N'' > 0$, N' croît strictement sur $\mathbb{R}$. Or $N'(0) = 0$, donc $N' < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $N' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc N décroit strictement sur $\mathbb{R}_-^*$ et croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $N(0) = 0$, N ne s'annule qu'en 0. Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Et puisque $f(0) = \frac{1}{2}$, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Convexité. L'exponentielle est convexe, donc son graphe est au dessus de sa tangente en 0, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$, l'inégalité étant stricte, sauf en 0. Donc pour tout $x \neq 0$, $f(x) > 0$ et $f(0) > 0$, donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

57 — **CCP**

1. Sans difficulté,

$$f(x) = \frac{3(x+1)+4}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}.$$

2. La fonction $g : x \mapsto 1/(x+1)$ est développable en série entière comme exemple fondamental du cours, et la fonction $h : x \mapsto 1/(x+1)^2$ l'est car $h = -g'$. Alors $f = 3g - 4h$ l'est comme combinaison linéaire de ces deux fonctions.

Toujours d'après le cours, en notant R_f, R_g et R_h les rayons de convergence des développements en série entière de f, g et h, $R_g = R_h = 1$ donc $R_f \geqslant \min\{R_g, R_h\} = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \,]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,n\,x^{n-1} \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,(n+1)\,x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,(4n+7)\,x^n. \end{aligned}$$

En outre, si $|x| = 1$,

$$|(-1)^n\,(4n+7)\,x^n| = 4n+7 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc dans ce cas, le développement en série entière de f diverge grossièrement et $R_f \leqslant 1$.

Finalement, $R_f = 1$ et $D = \,]-1,1[$.

3. Toujours d'après le cours, le développement limité de f en 0 s'obtient en tronquant son développement en série entière : pour x proche de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{3}(-1)^n\,(4n+7)\,x^n + \mathrm{o}(x^3) \\ &= 7 - 11\,x + 15\,x^2 - 19\,x^3 + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

$\boxed{58}$ **AM**

Notons (E) l'équation différentielle.

1. Analyse. Supposons que l'on puisse écrire

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$$

avec un rayon de convergence $R > 0$. Alors pour tout $x \in \,]-R,R[$,

$$\begin{aligned} & 4\,x\,y'' + 2\,y' - y = 0 \\ \iff\ & 4\,x\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^{n-1} \\ & \quad + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n = 0 \\ \iff\ & \sum_{n=0}^{+\infty}4\,(n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^n \\ & \quad + \sum_{n=0}^{+\infty}2\,(n+1)\,a_{n+1}\,x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n = 0 \\ \iff\ & \sum_{n=0}^{+\infty}(2\,(n+1)\,(2n+1)\,a_{n+1} - a_n)\,x^n = 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, pour tout $n \geqslant 0$,

$$2\,(n+1)\,(2n+1)\,a_{n+1} - a_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2\,(n+1)\,(2n+1)}$$

ou encore, pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2n\,(2n-1)} = \cdots = \frac{a_0}{(2n)!},$$

ce que l'on prouve par une récurrence immédiate, et le résultat est encore valide pour $n = 0$.

Synthèse. Posons $a_n = 1/(2n)!$ pour tout $n \geqslant 0$. On voit que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2\,(n+1)\,(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\,x^n$ est $R = +\infty$. Ainsi, la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). De plus, l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière est la droite $\mathbb{R}\varphi$. Pour finir, si $x \geqslant 0$, $x = (\sqrt{x}\,)^2$ donc

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x}\,)^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{x}\,)$$

et si $x < 0$, $x = -(\sqrt{-x}\,)^2$ donc

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(\sqrt{-x}\,)^{2n}}{(2n)!} = \cos\sqrt{-x}.$$

Ainsi, φ est la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{ch}(\sqrt{x}\,) & \text{si } x \geqslant 0, \\ \cos(\sqrt{-x}\,) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Comme 0 est singularité de (E), terminons la résolution sur $I = \mathbb{R}_-^*$ ou $I = \mathbb{R}_+^*$. Par analogie avec la fonction φ, introduisons la fonction

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{sh}(\sqrt{x}\,) & \text{si } x \geqslant 0, \\ \sin(\sqrt{-x}\,) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Constatons qu'elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue mais pas dérivable en 0. Un calcul sans difficulté prouve que ψ est solution sur I de (E). Comme ψ n'est pas dérivable en 0, elle n'est pas liée à φ. Mais on sait que l'ensemble des solutions de (E) sur I est un plan vectoriel, donc c'est $\mathrm{Vect}(\varphi, \psi)$.