

Sixième feuille d'exercices

INTÉGRALES À PARAMÈTRE

59 CCP

Considérons la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer qu'elle est définie sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
3. Étudier sa limite en $+\infty$.

60 CCP

1. Montrer que $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2tx) dx$ est définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et expliciter f' .
3. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

61 CCP

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.
2. Montrer qu'elle y est dérivable. Calculer f' et en déduire f .

62 CS

1. Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.
2. Déterminer f'' et en déduire f .

63 EIVP17

Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$ est
1° de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} ;
2° solution sur \mathbb{R} de $xy'' + y' + xy = 0$.

64 CS

1. Montrer la classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.

65 CS

1. Étudier les variations sur \mathbb{R}_+^* de la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+x^2t^2}} dt.$$

Que peut-on en déduire pour F ?