Corrigés des exercices de la sixième feuille

59 — CCP

1. Posons $I=\mathbb{R}_+$. Pour tout $x\geqslant 0$ et tout $t\in I$,

$$\left|\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}.$$

Or $t\mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$. Donc $t\mapsto\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ l'est aussi. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Posons $A=\mathbb{R}_+^*$ et considérons la fonction

$$g:A\times I\to\mathbb{R}_+,\ (x,t)\mapsto\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $t\in A$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et pour tout $(x,t)\in A\times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{-t^2\,e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

∘ On a vu que pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.
∘ Et bien-sûr, pour tout $x\in A$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I, toujours par opérations usuelles.
∘ Pour tous $a>0$, $x\in[a,+\infty[$ et $t\in I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{t^2\,e^{-xt^2}}{1+t^2}\leqslant e^{-at^2},$$

où $a>0$ et $e^{-at^2}\ll_{+\infty}1/t^2$, donc $t\mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur I.

D'après le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètre, on en tire que
- pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[\,\subset\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $x>0$,

$$f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. Voici deux preuves.

Preuve savante. Utilisons le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Notons ici $I=\,]0,+\infty[$, et reprenons les autres notations de la question précédente.
∘ Pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur I.
∘ Pour tout $t\in I$, $\lim_{x\to+\infty}g(x,t)=0$.
∘ Bien-sûr, la fonction nulle est continue sur I.
∘ Enfin, pour tout $x\in A$ et tout $t\in I$,

$$|g(x,t)|=\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\leqslant\frac{1}{1+t^2}.$$

D'après le théorème évoqué,
- pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I — ce que l'on sait déjà depuis la question 1 ;
- la fonction nulle est intégrable sur I — quelle surprise ;
- et l'on peut permuter :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=0.$$

Preuve directe. L'idée dans ce genre de situation est de se débarrasser du x dans l'exponentielle. Pour cela, pour $x>0$, posons $u=t\sqrt{x}$. c'est un changement de variable licite, car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans I. Alors,

$$|f(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{1+\frac{u^2}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Commentaire. Où l'on voit que la preuve savante n'est pas toujours la plus efficace.

60 — CCP

1. Soit $t\in\mathbb{R}$. La fonction $h:x\mapsto e^{-x^2}\cos(2\,t\,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, pour tout $x\geqslant 1$, $|e^{-x^2}\cos(2tx)|\leqslant e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$ et $x\mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc h aussi. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Posons $A=\mathbb{R}$, $I=\mathbb{R}_+$ et

$$g:A\times I\to\mathbb{R},\ (t,x)\mapsto e^{-x^2}\cos(2\,t\,x).$$

∘ Pour tout $x\in I$, $t\mapsto g(t,x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur A et pour tout $(t,x)\in A\times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)=-2\,x\,e^{-x^2}\sin(2\,t\,x).$$

∘ On vient de le voir, pour tout $t\in A$, $x\mapsto g(t,x)$ est intégrable sur I.
∘ Pour tout $t\in A$, $x\mapsto\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)$ est continue sur I.
∘ Enfin, pour tout $(t,x)\in A\times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right|\leqslant 2\,x\,e^{-x^2}\ll_{x\to+\infty}e^{-x}.$$

Donc la fonction $x\mapsto 2\,x\,e^{-x^2}$, intégrable sur I, est une domination valide de $\frac{\partial g}{\partial t}$.

Alors,
- pour tout $t\in A$, $x\mapsto\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)$ est intégrable sur I,
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A
- et pour tout $t\in A$,

$$\begin{aligned}f'(t)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^{+\infty}x\,e^{-x^2}\sin(2\,t\,x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3. Soit $t\in\mathbb{R}$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}f'(t)&=\Big[e^{-x^2}\sin(2\,t\,x)\Big]_0^{+\infty}-2\,t\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2\,t\,x)\,\mathrm{d}x\\&=-2\,t\,f(t).\end{aligned}$$

L'intégration par parties est valide car tous les termes manipulés ont un sens. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$

de cette équation différentielle est $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-t^2})$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = f(0)\,e^{-t^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-t^2}.$$

61 — **CCP**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h : t \mapsto e^{-t}\sin(xt)/t$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $t \in]0,+\infty[$,

$$|h(t)| = e^{-t}\,\frac{|\sin(xt)|}{t} \leqslant e^{-t}\,\frac{|xt|}{t} = x\,e^{-t}.$$

Or la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc aussi la fonction h. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Utilisons le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales dépendant d'un paramètre. Considérons $A = \mathbb{R}$, $I =]0,+\infty[$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{t}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A. De plus, pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(xt).$$

∘ On a vu à la question précédente que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.
∘ Toujours par opérations usuelles, pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
∘ Pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-t},$$

où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I, donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème évoqué,
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- et pour tout $x \in A$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in A$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\,e^{ixt}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

En intégrant, $f(x) = f(0) + \operatorname{Arctan} x$. Or, clairement, $f(0) = 0$, donc

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x.$$

62 — **CS**

1. Posons $I =]0,+\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord la fonction

$$h : t \mapsto \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,e^{-t}$$

est continue sur I. De plus, $h(t) \sim_{t\to 0} \frac{1}{2}x^2$. L'équivalent est valide même si $x = 0$, car h est alors la fonction nulle. Ainsi h est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, $|h(t)| \ll_{t\to+\infty} 1/t^2$, où $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc h l'est aussi.

Finalement, h est intégrable sur I et f est définie sur $A = \mathbb{R}$.

2. Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur A. Introduisons la fonction

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,e^{-t}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur A. De plus, pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}\,e^{-t} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)\,e^{-t}.$$

∘ On a vu précédemment que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.

Par opérations usuelles, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I. Et pour tout $t \in I$, $|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leqslant |x|\,e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I, donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ l'est aussi.

Commentaire. Ici, la majoration est valide sur I tout entier, donc il n'est pas nécessaire de le couper en deux pour l'intégrabilité.

∘ Par opération usuelles, pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur I.
∘ Enfin, pour tout $(x,t) \in A \times I$, $|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)| \leqslant e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I (bis) et ne dépend pas de x, donc constitue une domination valide.

Il s'ensuit que
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est ce classe $\mathscr{C}^2$ sur A ;
- pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t, \\ f''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Comme $f'(0) = 0$, $f'(x) = \operatorname{Arctan} x$. Alors, comme $f(0) = 0$ et en intégrant par parties,

$$f(x) = x\operatorname{Arctan} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

63 — **EIVP17**

1. Posons $I = [0, \pi]$, $A = \mathbb{R}$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \cos(x\sin(t)),$$

de sorte que f est la fonction

$$f : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_I g(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur A et

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2(t)\cos(x\sin(t)).$$

∘ Encore par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur I, donc elles y sont intégrables car I est un *segment*.

∘ Toujours par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur I.

∘ Enfin, on a la domination suivante :

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 1,$$

où $t \mapsto 1$ est continue donc intégrable sur le segment I.

Alors d'après le théorème de la classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales dépendant d'un paramètre,

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur I — ce qui était évident puisque I est un segment ;
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur A ;
- et pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t, \\ f''(x) &= \int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in A$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \pi\, f'(x) &= \Big[\cos(t)\sin(x\sin(t))\Big]_0^\pi \\ &\quad - \int_0^\pi x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -x\int_0^\pi (1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -x\,\pi\,(f(x) + f''(x)), \end{aligned}$$

et f est solution de l'équation différentielle proposée.

64 — **CS**

1. Pour prouver la classe $\mathscr{C}^2$ de f sur $\mathbb{R}_+^*$, prouvons celle de l'intégrale à paramètre définie par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons donc $A = \mathbb{R}_+^*$, $I = \mathbb{R}_+$ et

$$h : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^2$ sur A et pour tout $x \in A$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2},\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \frac{-t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur I.
∘ Pour tout $x \in A$ et $t \in I$,

$$|h(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2},$$

où $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable sur I, donc $t \mapsto h(x,t)$ l'est aussi. De même, comme $t \leqslant 2t \leqslant 1+t^2$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-xt},$$

où $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur I car $x > 0$, donc $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ l'est aussi.
∘ Pour tout segment $[a,b] \subset A$, avec $0 < a < b$, tout $x \in [a,b]$ et $t \in I$,

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-at},$$

où $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur I car $a > 0$. Donc $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ vérifie l'hypothèse de domination.

En vertu du théorème de la classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètre,
- pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur I,
- g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur tout $[a,b] \subset A$, donc sur A ;
- et pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ g''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc par produit, f est bien $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant e^{-xt}$, donc

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ et en $+\infty$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{\pi}{2x}.$$

65 — CS

1. Tout d'abord, pour tout $x > 0$ et $t \geqslant 0$,

$$\left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\right| \leqslant e^{-xt}$$

où $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $x > 0$. Donc F est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$.

En outre, si $0 < x < y$, par croissance de l'exponentielle, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} > \frac{e^{-yt}}{\sqrt{1+t^2}},$$

et par croissance de l'intégrale, $F(x) > F(y)$. Ainsi, F décroit strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaire. Il est donc inutile (et long !) de dériver F.

2. Voici deux preuves.

Preuve directe. On voit que pour tout $x > 0$,

$$F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

donc F tend vers 0 en $+\infty$.

Preuve savante. Utilisons le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

D'une part, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

D'autre part, puisque x tend vers $+\infty$, on peut se restreindre à $x \geqslant 1$. Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \geqslant 1$,

$$\left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\right| \leqslant e^{-t},$$

où $t \mapsto e^{-t}$ constitue une domination valable.

Alors, le théorème s'applique et l'on peut permuter la limite et l'intégrale :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = 0.$$

3. Pour des raisons très analogues, G est définie sur $\mathbb{R}$. On voit que pour x réel, $G(x) = H(x^2)$ où

$$H : u \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+ut^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Si l'on montre que H est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0, on pourra écrire $H(u) = a + bu + \mathrm{o}(u)$, donc $G(x) = a + bx^2 + \mathrm{o}(x^2)$. Mais comme G est (clairement) paire, on aura $G(x) = a + bx^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

Montrons que H est de classe $\mathscr{C}^1$. Il faut déjà qu'elle soit définie, donc il faut que $1 + ut^2 \geqslant 0$ c'est-à-dire $u \geqslant 0$. Posons $A = I = \mathbb{R}_+$ et

$$h : A \times I \to \mathbb{R},\ (u,t) \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+ut^2}}.$$

Pour tout $u \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur I et pour tout $t \in I$, $|h(u,t)| \leqslant e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I donc $t \mapsto h(x,t)$ l'est aussi. Pour tout $t \in I$, $u \mapsto h(u,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et pour tout $(u,t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,t) = \frac{-t^2\,e^{-t}}{2\,(1+ut^2)^{3/2}}.$$

Bien-sûr, pour tout $u \in I$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial u}(u,t)$ est continue sur I. Enfin, pour tout $(u,t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial u}(u,t)\right| \leqslant t^2\,e^{-t}$$

où $t \mapsto t^2\,e^{-t}$ est continue et intégrable sur I, et $\frac{\partial h}{\partial u}$ vérifie l'hypothèse de domination. Alors H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et pour tout $u \geqslant 0$,

$$H'(u) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial u}(u,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{-t^2\,e^{-t}}{2\,(1+ut^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, pour $u \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} H(u) &= H(0) + u\,H'(0) + \mathrm{o}(u) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t - u\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}t^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(u) \\ &= 1 - u + \mathrm{o}(u). \end{aligned}$$

Ainsi, quand x est proche de 0,

$$G(x) = 1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

Commentaire. Cette approche est plus aisée que de dériver G trois fois.

Soit $x > 0$. Dans $F(x)$, en posant $v = xt$, qui est un changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, on a

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{1+(\frac{v}{x})^2}}\,\frac{\mathrm{d}v}{x} = \frac{1}{x}G\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si x tend vers $+\infty$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^4}\right). \end{aligned}$$

Commentaire. Où l'on retrouve la limite de la question 2.