Septième feuille d'exercices

Espaces probabilisés

66

On dispose de deux jeux de 52 cartes et l'on tire une carte de chaque jeu. Quelle est la probabilité de tirer au moins un roi ?

67

Une maladie rare affecte une personne sur 10 000. Un test détecte la maladie chez un malade avec une fiabilité de 99%. Malheureusement, ce même test se révèle positif pour une personne saine dans un cas sur 1 000. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade quand son test est positif ?

68 — **CCP25**

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune trois boules noires ; l'urne U_1 contient en outre deux boules blanches et l'urne U_2 en contient quatre. On effectue des tirages successifs de la manière suivante : on choisit une urne au hasard et on en tire une boule dont on note la couleur et que l'on remet dans l'urne choisie ; si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon, il se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement B_n « la n^{e} boule tirée est blanche ». Calculer p_1, puis p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

69 — **CS**

Dans une urne, on place b boules blanches et b boules noires. Lorsque l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches dans l'urne. On note A_n l'évènement « on a tiré une boule blanche lors des n premiers tirages » et on pose $p_n = P(A_n)$. Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{b+an}{2b+an}\, p_n$, puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

70 — **CCP25**

Dans une zone désertique, un éthologue observe le comportement d'un animal qui erre entre trois points d'eau, qu'il nomme A, B et C. Au premier jour de son observation (le jour 0), l'animal se trouve au point A. Chaque jour, l'animal change de point d'eau aléatoirement, mais de façon apparemment équiprobable.

Dans son carnet d'observation, l'éthologue consigne les évènements suivants : pour un entier $n \in \mathbb{N}$, « au n^{e} jour, l'animal se trouve au point A, respectivement B et C », qu'il nomme respectivement A_n, B_n et C_n. Et il pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

Déterminer a_n, b_n et c_n.

71 — **MP15**

On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (*sic*). Ensuite, chaque jour, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré ; elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment.

1. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants. Montrer que

$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n}\Big) \leqslant \exp\Big(-\sum_{n\in\mathbb{N}} P(E_n)\Big).$$

2. Quelle est la probabilité que la boule numéro 10 sorte une infinité de fois ?