# Huitième feuille d'exercices

## Variables aléatoires

**72** — CCP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $n$ variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $N$ qui vaut 0 si $X_1 = \cdots = X_n = 1$ et $\min\{k \in [\![1, n]\!] \mid X_k = 0\}$ sinon.

**73** — CCP18

Un élément chimique émet des électrons pendant une durée $T$ ; on note $N$ la variable aléatoire qui dénombre les électrons émis et on admet que $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un électron a une probabilité $p$ d'être efficace, indépendamment des autres. On note $X$ la variable aléatoire qui dénombre les électrons efficaces et $Y$ celle qui dénombre ceux qui ne le sont pas.

**1.** Pour tout $j \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X = k \,|\, N = j)$.

**2.** En déduire la loi marginale de $X$ puis donner $E(X)$ et $V(X)$ sans calcul.

**3.** $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**4.** En posant $N = X + Y$, calculer $\operatorname{Cov}(X, N)$ et en commenter le signe.

**74** — CCP15

**1.** Soit une variable aléatoire $Y$ telle que $Y \sim \mathscr{P}(2)$. Déterminer la loi de $T = 1 + Y$.

**2.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \frac{e^{-2}\,4^k\,(1 + \alpha\,k)}{(2\,k)!}.$$

**a.** Donner une condition sur $\alpha$ pour que la famille $(p_k)$ définisse une loi de probabilité.

**b.** On suppose cette condition réalisée. Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suive la loi précédente.

**75** — CCP

**1.** Une variable aléatoire $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner la fonction génératrice $G_X$ de $X$. Que valent $G_X(1)$ et $G_X(-1)$ ? En déduire la probabilité que $X$ soit paire.

**2.** Une variable aléatoire $Y$, indépendante de $X$, suit la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Calculer la probabilité que $XY$ soit paire.

**76** — CCP

**1.** Soit une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ i.i.d. telle que $X_1 \sim \mathscr{B}(p)$. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

**2.** Considérons alors une variable aléatoire $N$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $N + 1 \sim \mathscr{G}(p)$.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]-1, 1\right[$, calculer

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(S_N = k)$.

**77** — E3A

Soient $n$ un entier naturel non nul et $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2,$$
$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

**1.** Montrer de deux manières différentes que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

**2.** Déterminer la valeur du réel $\alpha$.

**3.** Donner les lois des variables aléatoires $X$ et $Y$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

**4.** Reconnaitre la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de $X$.

**5.** Soient $p$, $q$ et $r$ trois entiers naturels et $A$ un ensemble fini de cardinal $p + q$. En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de $A$ de cardinal $r$, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

**6.** En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.