Corrigés des exercices de la huitième feuille

72 — **CCP**

Pour commencer, $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Dire que $N = 0$ signifie que les X_k valent tous 1, donc en termes d'évènements,

$$(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1).$$

Puisque les X_k sont indépendantes, on peut dire que

$$\begin{aligned} P(N = 0) &= P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\Big) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P(X_k = 1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $k \in [\![1, n]\!]$. Dire que $N = k$ signifie que les X_j valent 1 si $j < k$, puis $X_k = 0$, et les valeurs suivantes n'importent pas, donc

$$(N = k) = \Big(\bigcap_{j=1}^{k-1} (X_j = 1)\Big) \cap (X_k = 0),$$

et, toujours grâce à l'indépendance des X_k,

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \Big(\prod_{j=1}^{k-1} P(X_j = 1)\Big) P(X_k = 0) \\ &= \Big(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\Big)\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) = \frac{k-1}{k!}. \end{aligned}$$

73 — **CCP18**

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Supposons que $N = j$. Sachant que chacun des j électrons émis est efficace indépendamment des autres, le nombre de ceux qui le sont suit une loi binomiale $\mathscr{B}(j, p)$. Donc pour tout $k \in [\![0, j]\!]$,

$$P(X = k \,|\, N = j) = \binom{j}{k} p^k q^{j-k},$$

en notant $q = 1 - p$.

2. Les évènements $(N = j)_{j \in \mathbb{N}}$ forment un système complet donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = k \,|\, N = j)\, P(N = j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} P(X = k \,|\, N = j)\, P(N = j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{j!}{k!\,(j-k)!}\, p^k q^{j-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{p^k q^{j-k} \lambda^k \lambda^{j-k}}{k!\,(j-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{j-k}}{(j-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}, \end{aligned}$$

car $p + q = 1$. Ainsi, $X \sim \mathscr{P}(\lambda p)$ et $E(X) = \lambda p$, $V(X) = \lambda p$.

3. La réponse est surement oui, sachant que les électrons sont efficaces indépendamment les uns des autres. Prouvons-le.

Sur le même principe que plus haut, en inversant les rôles de p et q, $Y \sim \mathscr{P}(\lambda q)$. Soient k et ℓ des entiers. Comme $N = X + Y$,

$$\begin{aligned} P((X = k) \cap (Y = \ell)) &= P((X = k) \cap (N = k + \ell)) \\ &= P(X = k \,|\, N = k + \ell)\, P(N = k + \ell) \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} p^k q^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \\ &= e^{-\lambda(p+q)} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\ &= P(X = k)\, P(Y = \ell). \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit que l'on a bien $X \perp\!\!\!\perp Y$, comme on le pensait.

4. Comme $N = X + Y$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X, N) &= \operatorname{Cov}(X, X + Y) \\ &= \operatorname{Cov}(X, X) + \operatorname{Cov}(X, Y) = V(X), \end{aligned}$$

car $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Or $X \neq 0$, donc $V(X) > 0$. Ainsi, $\operatorname{Cov}(X, N) > 0$ donc en particulier, $\operatorname{Cov}(X, N) \neq 0$. Cela entraine que X et N ne sont pas indépendantes.

74 — **CCP15**

1. D'abord, comme $Y \sim \mathscr{P}(2)$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(1 + Y = n) = P(Y = n - 1) \\ &= e^{-2} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

2.a. Comme $\alpha \geqslant 0$, les p_k sont strictement positifs, donc la famille $(p_k)_{k \geqslant 0}$ définit une loi de probabilité si et seulement si sa somme est 1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}\, 4^k\, (1 + \alpha k)}{(2k)!} \\ &= e^{-2} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(2k)!} + \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k\, k}{(2k)!} \Big) \\ &= e^{-2} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} + \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!} \Big) \\ &= e^{-2} (\operatorname{ch} 2 + \alpha \operatorname{sh} 2). \end{aligned}$$

Comme cette somme doit valoir 1 et que $\operatorname{ch} 2 + \operatorname{sh} 2 = e^2$,

$$\alpha = \frac{e^2 - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 2} = 1.$$

Commentaire. Selon le programme, les calculs sont valides car on n'a manié que des termes positifs et que le résultat est fini.

2.b. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{e^{-2}\,4^k\,(1+k)}{(2k)!}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}\,4^k\,k\,(k+1)}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}\,4^{k-1}\,(2k)\,(2k+2)}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}\,4^{k-1}\,(2k-1+3)}{(2k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}\,2^{2k-2}\,(2k-1)}{(2k-1)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}\,2^{2k-2}\,3}{(2k-1)!} \\
&= e^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!} + \frac{3}{2}\,e^{-2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
&= e^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} + \frac{3}{2}\,e^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= e^{-2}\left(\operatorname{ch} 2 + \frac{3}{2} \operatorname{sh} 2\right) = \frac{5 - e^{-4}}{4}.
\end{aligned}$$

Commentaire. Là encore, les calculs sont valides pour la même raison que précédemment.

75 — **CCP**

1. D'après le cours, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$. On a $G_X(1) = 1$ et $G_X(-1) = e^{-2\lambda}$.

Alors, la probabilité que X soit paire est

$$\begin{aligned}
P(X \in 2\mathbb{N}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda}\,\operatorname{ch}(\lambda) \\
&= \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} = \frac{G_X(1) + G_X(-1)}{2}.
\end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(XY \in 2\mathbb{N}) &= P(XY \in 2\mathbb{N} \,|\, Y = 1)\,P(Y = 1) \\
&\quad + P(XY \in 2\mathbb{N} \,|\, Y = 2)\,P(Y = 2) \\
&= P(X \in 2\mathbb{N})\,\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4} = \frac{3G_X(1) + G_X(-1)}{4}.
\end{aligned}$$

76 — **CCP**

1. D'après le cours, $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$.

2. Commençons par déterminer la loi de N. Comme $N + 1 \sim \mathscr{G}(p)$, $(N+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $N(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(N = n) &= P(N + 1 = n + 1) \\
&= p\,(1-p)^{(n+1)-1} = p\,(1-p)^n.
\end{aligned}$$

2.a. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-1, 1\right[$. Comme on a le droit de dériver terme à terme les séries entières, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,x^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^n) = \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\
&= \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

2.b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $S_N(\Omega) = [\![0, N]\!]$, pour réaliser $S_N = k$, il est nécessaire que $N \geqslant k$. Avec les probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned}
P(S_N = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_N = k \,|\, N = n)\,P(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k)\,P(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,p\,(1-p)^n \\
&= p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-k} \\
&= p^{k+1}\,(1-p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2(n-k)} \\
&= \frac{p^{k+1}\,(1-p)^k}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} \\
&= \frac{p^{k+1}\,(1-p)^k}{(2p-p^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^k}{(2-p)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

77 — **E3A**

1. *Binôme de Newton.* On voit que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Dénombrement. Considérons l'ensemble $E = [\![1, n]\!]$ et l'ensemble de ses parties $\mathscr{P}(E)$. On sait que $\operatorname{card}(E) = n$ et $\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$. Écrivons

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{A \in \mathscr{P}(E)} 1.$$

Dans cette somme, regroupons les parties de E par leur cardinal $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{A \in \mathscr{P}(E) \\ \operatorname{card}(A) = k}} 1.$$

La somme intérieure est le nombre de parties de E contenant k éléments : il y en a exactement $\binom{n}{k}$. Ainsi,

$$2^n = \operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.$$

2. Par définition de la loi du couple (X, Y),

$$\sum_{(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2} P(X = i, Y = j) = 1$$

d'où

$$\begin{aligned}1 &= \alpha \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\right) = \alpha\, 2^n\, 2^n.\end{aligned}$$

Donc $\alpha = 2^{-2n} = 4^{-n}$.

3. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}P(X=i) &= \sum_{j=1}^{n} P(X=i, Y=j)\\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &= \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\\ &= \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}2^n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.\end{aligned}$$

De même, si $j \in [\![1, n+1]\!]$,

$$P(Y=j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}.$$

Où l'on voit que pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}&P(X=i, Y=j) = \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &= \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1} = P(X=i)\,P(Y=j),\end{aligned}$$

donc $X \perp\!\!\!\perp Y$.

4. Comme $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$, $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}P(Z=k) &= P(X-1=k) = P(X=k+1)\\ &= \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\,\frac{1}{2^{n-k}},\end{aligned}$$

où l'on reconnait que $Z \sim \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$. Donc

$$E(X) = E(Z+1) = E(Z)+1 = \frac{n}{2}+1,$$

et
$$V(X) = V(Z+1) = V(Z) = \frac{n}{4}.$$

5. *Première façon.* Le nombre de parties à r éléments de A est

$$\binom{p+q}{r}.$$

Deuxième façon. Considérons que $A = B \cup C$ où $\operatorname{card}(B) = p$, $\operatorname{card}(C) = q$ et bien-sûr $B \cap C = \varnothing$. Alors, pour une partie $D \subset A$ de cardinal r, on a

$$D = D \cap A = D \cap (B \cup C) = (D \cap B) \cup (D \cap C).$$

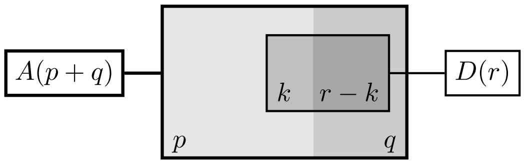
Comme B et C sont disjoints, $D \cap B$ et $D \cap C$ le sont aussi, donc

$$\operatorname{card}(D) = \operatorname{card}(D \cap B) + \operatorname{card}(D \cap C),$$

ou encore, en notant $k = \operatorname{card}(D \cap B)$,

$$r = k + (r-k).$$

L'égalité algébrique est une complète trivialité, mais c'est son interprétation ensembliste qui importe. Voici une illustration possible de la situation.



Pour choisir dans A une partie D de cardinal r, il faut et il suffit donc de choisir dans B une partie $D \cap B$ de cardinal k — il y a $\binom{p}{k}$ choix possibles — et de choisir dans C une partie $D \cap C$ de cardinal $r-k$ — il y a $\binom{q}{r-k}$ choix possibles : il y a donc $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ choix possibles pour D, avec la contrainte que $D \cap B$ contient k éléments. Pour compter le nombre de parties D à r éléments, il reste à sommer sur k : le nombre de telles parties est donc

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

Conclusion. Finalement,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

Bonus. Voici une troisième interprétation amusante. Pour tout x réel, on a

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{r=0}^{p+q}\binom{p+q}{r}x^r = \sum_{r=0}^{+\infty}\binom{p+q}{r}x^r$$

en prenant la convention usuelle que $\binom{p+q}{r} = 0$ dès que $r > p+q$. Avec cette convention, la deuxième somme est bien finie et converge donc. Mais on peut aussi écrire, avec la même convention,

$$\begin{aligned}(1+x)^{p+q} &= (1+x)^p\,(1+x)^q\\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{p}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\binom{q}{\ell}x^\ell\right).\end{aligned}$$

En faisant le produit de Cauchy de ces deux séries entières, on obtient

$$\begin{aligned}(1+x)^{p+q} &= \sum_{r=0}^{+\infty}\left(\sum_{k+\ell=r}\binom{p}{k}\binom{q}{\ell}\right)x^r\\ &= \sum_{r=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}\right)x^r.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de $(1+x)^{p+q}$, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r},$$

où l'on retrouve l'expression précédente.

Commentaire. Redisons-le : les séries entières sont en fait des polynômes, et leur convergence, absolue pour l'utilisation du produit de Cauchy, est complètement acquise. Leur utilisation permet de ne pas s'inquiéter des degrés des polynômes.

6. En prenant $p = q = r = n$ dans cette formule et sachant que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$