# Corrigés des exercices de la neuvième feuille

**78** — AM

Convergence simple. On voit que $f_n(0) = 0$ et que pour $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$, donc la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

*Première façon.* La convergence ne peut être uniforme sur $\mathbb{R}_+$, car les $f_n$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, quand $f$ ne l'est pas.

*Deuxième façon.* Clairement, en posant $x_n = 1/n$, on voit que

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} - 0.$$

Ce terme ne tend pas vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, donc la suite de fonctions $(f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f$.

Convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. D'après l'étude précédente, on voit que c'est 0 qui pose problème. Plaçons-nous donc sur un intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Pour tous $x \in [a, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = 1 - \frac{nx}{1+nx} = \frac{1}{1+nx} \leqslant \frac{1}{1+na}.$$

Ce dernier majorant ne dépend pas de $x$ et tend vers 0 avec $n$, donc la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

**79** — AM

Comme les fonctions $f_n$ sont impaires, menons l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence simple. Clairement, pour tout $x \geqslant 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. Donc la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.

Convergence uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc la suite de fonctions $(f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $f$.

Convergence uniforme sur tout intervalle $[0, b]$ où $b > 0$. L'étude précédente montre que le problème se situe en $+\infty$. Plaçons-nous donc sur un intervalle $[0, b]$, avec $b > 0$. Pour tout entier $n \geqslant \lfloor b \rfloor + 1$, $b/n \leqslant 1$. Alors, pour tout $x \in [0, b]$, $0 \leqslant x/n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \sin(x/n) \leqslant x/n$ et

$$|f_n(x) - f(x)| = x - n\sin(x/n).$$

Or $x \mapsto x - n\sin(x/n)$ croît sur $[0, b]$ car sa dérivée vaut $1 - \cos(x/n) \geqslant 0$. Alors

$$\|f_n - f\|_\infty^{[0,b]} = b - n\sin(b/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur tout intervalle $[0, b]$ où $b > 0$.

**80**

Convergence simple. D'une part, $f_n(0) = f(0) = 0$. D'autre part, si $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n\,x = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} f(y) = 0$, donc par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme. Comme la fonction $f$ n'est pas nulle, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = x_0/n$ : on voit que $f_n(x_n) = f(x_0) \not\to 0$ donc la suite de fonctions $(f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. L'étude précédente montre que le problème se situe en 0. Plaçons-nous donc sur un intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Considérons un réel $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{+\infty} f = 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $y \geqslant A$, $|f(y)| \leqslant \varepsilon$. En outre, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $n\,a \geqslant A$. Alors, pour tous $x \in [a, +\infty[$ et tout $n \geqslant N$, $nx \geqslant n\,a \geqslant A$, donc $|f_n(x)| = |f(nx)| \leqslant \varepsilon$, d'où $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

**81** — MP

Convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour $n$ assez grand, $n \geqslant x$, donc

$$f_n(x) = \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n = \exp\Big(n\ln\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$$

et la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de majorer $\|f_n - f\|_\infty^{[0,+\infty[}$. Comme $f_n \leqslant f$, étudions $g_n = f - f_n$. En découpant $[0, +\infty[ = [0, n[ \cup [n, +\infty[$, on peut dire que

$$\|g_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \max\big\{\|g_n\|_\infty^{[0,n[}, \|g_n\|_\infty^{[n,+\infty[}\big\}. \tag{1}$$

D'abord, si $x \in [n, +\infty[$, $g_n(x) = e^{-x} \leqslant e^{-n}$ donc

$$\|g_n\|_\infty^{[n,+\infty[} \leqslant e^{-n}. \tag{2}$$

Étudions maintenant $\|g_n\|_\infty^{[0,n[}$ à l'aide des variations de $g_n$ sur $]0, n[$ : on exclut 0 car $g_n(0) = 0$. Si $x \in ]0, n[$,

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= -e^{-x} + \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^{n-1} \\ &= e^{-x}\Big(-1 + \exp\Big(x + (n-1)\ln\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, le signe de $e^u - 1$ est le même que celui de $u$ : pour connaitre le signe de $g_n'(x)$, il reste donc à étudier le signe de

$$h_n(x) = x + (n-1)\ln\Big(1 - \frac{x}{n}\Big).$$

Sur $]0, n[$, la fonction $x \mapsto 1 - x/n$ décroit strictement, donc $h_n$ aussi par croissance du logarithme. Or

$$\lim_{x\to 0^+} h_n(x) = 1 \text{ et } \lim_{x\to n^-} h_n(x) = -\infty.$$

Donc $h_n$ s'annule une et une seule fois sur $]0, n[$. Il en est donc de même pour $g_n'$. Nommons $a_n$ l'unique réel de $]0, n[$ tel que $g_n'(a_n) = 0$.

Avec l'étude de signes précédente, $g_n$ croît strictement sur $]0, a_n[$ puis décroit strictement sur $]a_n, n[$. Donc $\|g_n\|_\infty^{[0,n[} = g_n(a_n)$. On sait que

$$g_n'(a_n) = 0 = -e^{-a_n} + \Big(1 - \frac{a_n}{n}\Big)^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned} g_n(a_n) &= e^{-a_n} - \Big(1 - \frac{a_n}{n}\Big)\Big(1 - \frac{a_n}{n}\Big)^{n-1} \\ &= e^{-a_n} - \Big(1 - \frac{a_n}{n}\Big)e^{-a_n} = \frac{a_n\, e^{-a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$

car $u \mapsto u\, e^{-u}$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\|g_n\|_\infty^{[0,n[} \leqslant \frac{1}{n}. \qquad (3)$$

De (1), (2) et (3), on tire que

$$\|g_n\|_\infty^{[0,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n},$$

où l'on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = 0,$$

ce qui signifie que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f$.

**82** — **CCP**

**1.** Les fonctions $f_n$ sont impaires, donc il suffit de mener l'étude sur $\mathbb{R}_+$. On voit que $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| = f_n(x) \ll 1/n^2$, où $\sum 1/n^2$ converge donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. Finalement, $\sum f_n$ converge simplement et absolument sur $\mathbb{R}$.

**2.** Grâce à la convergence simple, la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ équivaut à celle de la suite des restes $(R_n)$ vers la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$. Comme on n'ajoute que des termes positifs,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,x\,e^{-kx^2} \geqslant (n+1)\,x\,e^{-(n+1)x^2}.$$

Alors

$$R_n\Big(\frac{1}{n+1}\Big) \geqslant e^{-1/(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0.$$

Cela signifie que la suite de fonctions $(R_n)$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

**83** — **CS**

Comme les $f_n$ sont paires, menons l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence normale. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = f_n(0) = \frac{1}{n}$$

et la série de Riemann $\sum 1/n$ diverge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Comme la borne supérieure de $f_n$ est atteinte en 0, on se doute qu'il faut s'en écarter. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2\, a^2}.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Convergence simple. $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Elle y converge donc simplement aussi. Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, mais que par ailleurs $f_n(0) = 1/n$ et que $\sum_{n\geqslant 1} f_n(0)$ diverge, finalement, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

**84** — **CS**

Comme les $f_n$ sont paires, menons l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence normale. $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = 1/n$ donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Convergence simple. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Utilisons le critère spécial des séries alternées. Clairement, $(-1)^n f_n(x)$ ne change pas de signe et $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$. Pour étudier la décroissance de la suite $(|f_n(x)|)_n$, introduisons

$$g : y \mapsto \frac{y}{y^2 + x^2},$$

de sorte que $|f_n(x)| = g(n)$. Pour tout $y \geqslant 0$,

$$g'(y) = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Il s'ensuit que $g'(y) < 0$ pour $y > x$ : ainsi, $(|f_n(x)|)_n$ décroit à partir du rang $N = \lfloor x \rfloor + 1$. Du coup, $\sum f_n(x)$ converge d'après le critère des séries alternées, donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme. On voit que le rang à partir duquel $(|f_n(x)|)_n$ décroit dépend de $x$, donc à priori on ne peut pas utiliser le critère spécial des séries alternées de façon uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $a \geqslant 0$. Posons $N = \lfloor a \rfloor + 1$. Pour tout $x \in [0, a]$, $N \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$ donc la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant N}$ décroit. Ainsi, on peut utiliser le critère spécial des séries alternées : pour $n \geqslant N$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est majoré par le premier terme négligé : $|R_n| \leqslant |f_{n+1}| \leqslant 1/n$. Ainsi, la suite $(R_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, a]$, et $\sum f_n$ y converge uniformément.

**85**

**1.** Introduction. Considérons la fonction
$$w : z \mapsto \frac{z-i}{z+2i},$$
de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = w^n$. Cette fonction $w$ est définie sur $D = \mathbb{C} \smallsetminus \{2i\}$, donc plaçons-nous désormais sur $D$.

À titre d'entrainement, étudions successivement les convergences simple, uniforme et normale.

Convergence simple. Soit $z \in D$. La série géométrique $\sum w^n(z)$ converge si et seulement si $|w(z)| < 1$, soit $|z-i| < |z+2i|$. Cela traduit le fait que la distance de $z$ à $i$ est strictement inférieure à celle de $z$ à $2i$. L'égalité de ces deux distances est réalisée sur la médiatrice du segment $[-2i, i]$, c'est-à-dire la droite $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur le demi-plan $H$ d'équation $\operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}$.

Convergence uniforme. Soient $z \in H$ et $n \in \mathbb{N}$. Le reste d'ordre $n$ est
$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w^k(z) = \frac{w^{n+1}(z)}{1-w(z)}.$$
En choisissant $z = iy$, donc avec $y \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on a
$$w(iy) = \frac{y-1}{y+2},$$
donc
$$R_n(iy) = \frac{\left(\dfrac{y-1}{y+2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{y-1}{y+2}} = \frac{(y-1)^{n+1}}{3\,(y+2)^n}$$
et
$$|R_n(iy)| = \frac{|y-1|^{n+1}}{3\,|y+2|^n} \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty.$$
Cela prouve que le reste $R_n$ n'est pas borné sur $H$, donc $\|R_n\|_\infty^H$ n'existe pas et la suite de fonctions $(R_n)$ ne converge pas uniformément sur $H$ vers la fonction nulle. Donc la série de fonction $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $H$.

*Commentaire.* Le choix de $z = iy$ est motivé de façon géométrique. On a vu que $|w(z)|$ mesure le rapport des distances de $z$ à $i$ et $-2i$, et ces deux points sont sur la droite $i\mathbb{R}$. Il est donc naturel d'en étudier les points.

Convergence normale. Puisqu'elle ne converge pas uniformément sur $H$, la série de fonctions $\sum f_n$ n'y converge pas normalement non plus.

Somme. Pour $z \in H$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-i}{z+2i}\right)^n = \frac{1}{1 - \dfrac{z-i}{z+2i}} = \frac{2-iz}{3}.$$