

8 Fractions rationnelles

Nous avons déjà parlé de fractions rationnelles au chapitre 8., nous avons même appris à les décomposer en éléments simples. Voyons de manière un peu plus rigoureuse la définition des choses.

8.1 Premières définitions

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, on suppose $B \neq 0$, apprenons ici, à manipuler des objets que nous écrirons :

$$F = \frac{A}{B}$$

F est appelée une *fraction rationnelle* à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'ensemble de toutes les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$. La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas au programme des classes MPSI, admettons son existence en précisant que cet ensemble vérifie la propriété suivante :



Soit $(A, B, C, D) \in \mathbb{K}[X]^4$, on suppose $B \neq 0$ et $D \neq 0$, on a l'équivalence :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{ssi} \quad AD = BC$$

Exemple : Ainsi, dans $\mathbb{C}(X)$, les fractions rationnelles $\frac{1}{X}$ et $\frac{X-1}{X(X-1)}$ sont égales, on a en effet :

Une fraction rationnelle F possède donc plusieurs écritures possibles, si par exemple on a :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

on dit alors que (A, B) et (C, D) sont des *représentants* de F . Parmi toutes les écritures d'une fraction, il en existe où les représentants ont des degrés plus petits, on introduit la définition suivante.

Propriété - Définition (forme irréductible d'une fraction rationnelle) :

Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ peut s'écrire sous la forme $F = \frac{A}{B}$ avec A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux, on parle alors d'une *forme irréductible* de F .

Dém. : 46 Si $F = \frac{P}{Q}$, posons $D = Q \wedge P$, on a alors $P = AD$, $Q = BD$ et $F = \frac{A}{B}$. □

Exemple :

L'écriture $F = \frac{(X^2 + 1)^2 X (X - 1)}{(X^2 + 1) X^2 (X - 1)^3}$ n'est pas irréductible, mais l'écriture $F = \dots\dots\dots$ l'est.

Remarque :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on peut écrire $P = \frac{P}{1}$ ce qui permet de *considérer les polynômes comme des fractions rationnelles* !

8.2 Le corps $\mathbb{K}(X)$

On définit sur $\mathbb{K}(X)$ plusieurs lois de composition.

Définition (somme et produit de fractions rationnelles) :

Prenons $F = \frac{A}{B}$, $G = \frac{C}{D}$, $a \in \mathbb{K}$, on pose : $F + G = \frac{AD + BC}{BD}$ $F \times G = \frac{AC}{BD}$ $aF = \frac{aA}{B}$

On admet que ces définitions ne dépendent pas des représentants choisis pour F et G .

Théorème (Le corps $\mathbb{K}(X)$) :

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps, appelé le corps des fractions rationnelles.

Dém. : 47 On vérifie tous les axiomes d'un corps, voir le chapitre 14.. □

8.3 Degré, zéro, pôle, partie entière d'une fraction rationnelle

Propriété - Définition (degré d'une fraction rationnelle) :

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

La quantité $\deg(A) - \deg(B)$ ne dépend pas du représentant (A, B) de la fraction choisie, on l'appelle *degré* de la fraction, noté $\deg(F)$.

Dém. : [48] On suppose $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et on montre que $\deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D)$. $\square$

Exemple : Quel est le degré de la fraction $F = \frac{(X^2 + 1)(X - 1)^2}{X^2(X - 1)^3}$? $\deg(F) = \dots\dots\dots$

Le degré d'une fraction est soit un entier, qui peut être négatif, soit $-\infty$ lorsque le numérateur est nul.

Définition (zéro, pôle d'une fraction rationnelle) :

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ que l'on suppose écrite sous forme *irréductible*.

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est un *zéro* de multiplicité $m \in \mathbb{N}$ de la fraction F lorsque λ est une racine de multiplicité m du numérateur A .
- On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est un *pôle* de multiplicité $m \in \mathbb{N}$ de la fraction F lorsque α est une racine de multiplicité m du dénominateur B .

Remarque : On parle de pôle ou de zéro *simple*, *double*, *triple*, ... selon que leur multiplicité est égale à 1, 2, 3, ...

Exemple : Soit $F = \frac{(X^2 + 1)(X - 1)^2(X - 2)}{X^2(X - 1)^3(X - 2)} = \dots\dots\dots$

Trouver le degré de la fraction F , ses zéros et ses pôles ainsi que leur multiplicité.

Zéros : $\dots\dots\dots$

Pôles : $\dots\dots\dots$

Propriété - Définition (partie entière) :

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $S \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

$$F = E + S \quad \text{et} \quad \deg(S) < 0$$

E est appelé la *partie entière* de F , il s'agit du quotient de la division euclidienne de A par B .

Dém. : [49] Pour l'existence, on effectue la division euclidienne de A par B . Pour l'unicité, on suppose comme toujours une double existence. $\square$



De la démonstration précédente, on retient qu'une division euclidienne de A par B permet d'obtenir la partie entière, ceci a déjà été vu au chapitre 8.

Exemple : Déterminer la partie entière de la fraction

$$F = \frac{X^4 + X + 1}{X^2 - 1}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + & X + 1 \\ \hline & X^2 - 1 \\ \hline \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{array}$$

Remarque :

- Si $\deg(F) < 0$, la partie entière de F est nul.
- Si $\deg(F) \geq 0$, la partie entière de F est un polynôme de degré $\deg(F)$.

8.4 Décomposition en éléments simples

Cette partie vient compléter ce qui a déjà été fait au chapitre 8., il est maintenant possible de déterminer la décomposition dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

8.4.1 Forme de la décomposition

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme **irréductible**, on note E sa partie entière.

Dans $\mathbb{C}$, d'après le théorème de factorisation [31], tout polynôme est scindé et s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1, voici alors le théorème donnant la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction F .

Théorème (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$) :

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les pôles de F de multiplicité $m_1, \dots, m_r$, on sait alors que B se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme :

$$B = a \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

Il existe alors une unique famille $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k \leq m_i}}$ de nombres complexes telle que :

$$F = \boxed{E} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \alpha_i)^k}$$

Cette écriture est la *décomposition en éléments simples* de F sur $\mathbb{C}$, de plus :

$\boxed{}$: Partie entière de la décomposition

$\boxed{}$: *Partie polaire* associée au pôle α_i .

Dém. : 50 admis

□

Exemple : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$:

$$(X - 1)(X^4 - 1) = \dots\dots\dots$$

Écrire la forme de la décomposition de la fraction $F = \frac{1}{(X - 1)(X^4 - 1)}$ sur $\mathbb{C}$.

$$F = \dots\dots\dots$$

Dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème de factorisation [32], un polynôme s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1 ou 2, voici alors le théorème donnant la forme de la décomposition en éléments simples.

Théorème (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$) :

On sait que B se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$B = a \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{n_j}$$

Il existe des familles uniques $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k \leq m_i}}$, $(b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$ et $(c_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$ de nombres réels telles que :

$$F = \boxed{E} + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} \frac{b_{jk}X + c_{jk}}{(X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^k}$$

Cette écriture est la *décomposition en éléments simples* de F sur $\mathbb{R}$, de plus :

$\boxed{}$: Partie entière de la décomposition

$\boxed{}$: *Partie polaire* associée au pôle α_i .

Dém. : 51 admis

□

Ce théorème a déjà été énoncé au chapitre 8. sous une forme **qui semblait plus simple!**

Exemple : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X - 1)(X^4 - 1) = \dots\dots\dots$$

Écrire la forme de la décomposition de la fraction $F = \frac{1}{(X-1)(X^4-1)}$ sur $\mathbb{R}$.

$F = \dots\dots\dots$

8.4.2 Calcul d'une décomposition en éléments simples



Quatre techniques ont déjà été vues au chapitre 8. pour calculer les différents coefficients d'une décomposition en éléments simples.

52 Exemple : Terminer la décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{(X-1)(X^4-1)}$ sur $\mathbb{C}$.

$$F = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} \right)$$

Aux quatre techniques vues au chapitre 8. se rajoute une propriété supplémentaire.

Propriété (Partie polaire d'un pôle simple) :

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ écrite sous forme irréductible, ayant un pôle simple α .

Le coefficient de $\frac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{B}'(\alpha)}$.

Dém. : **53** On écrit $B = (X-\alpha)C$, puis on montre que $\tilde{C}(\alpha) = \tilde{B}'(\alpha)$. On écrit alors le début du développement de la fraction $\frac{A}{C}$ que l'on évalue en α . $\square$

54 Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, montrer que :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

.....

8.4.3 Décomposition en éléments simples de P'/P

On dispose enfin d'une propriété permettant de déterminer la décomposition de la fraction P'/P .

Propriété (Décomposition en éléments simples de P'/P) :

Soit $P = a \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$ un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$, la décomposition de $\frac{P'}{P}$ en éléments simples est alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - \alpha_i}$$

Dém. : **55** On calcule P' puis on forme la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$. $\square$

56 Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de $F = \frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$.