

Dérivabilité

Le début de ce chapitre fait suite à ce qui a déjà été étudié au chapitre 7.

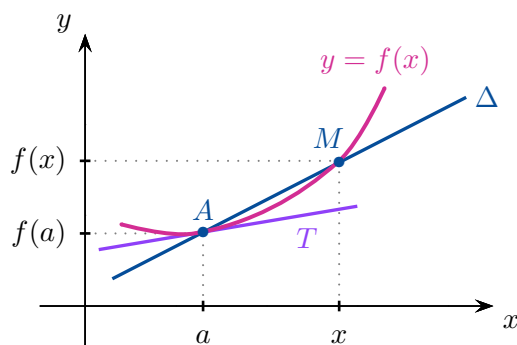
1 Dérivée en un point

1.1 Nombre dérivé

Définition (nombre dérivé) :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $a \in D$ et une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est *dérivable en a* lorsque la limite : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est réelle. Dans ce cas, cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$.



Le quotient :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est égal à la pente (on dit aussi coefficient directeur) de la droite Δ . On appelle ce quotient, *taux d'accroissement* de f en a .

Lorsque l'on fait tendre x vers a , la droite Δ pivote autour du point A . Elle pivote jusqu'à atteindre une « position limite » qui est la droite T . Cette droite est appelée *tangente* de f en a .

L'étude de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ permet donc de trouver la pente et ainsi l'équation de la tangente T .

Regardons deux possibilités : lorsque la limite est réelle et lorsqu'elle est infinie.

- Si le taux d'accroissement a une limite réelle, c'est-à-dire lorsque f est dérivable en a , la pente de la tangente est donnée par $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et l'équation de la tangente est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Si le taux d'accroissement a une limite infinie, la droite Δ pivote jusqu'à atteindre une position limite verticale, la tangente est donc dans ce cas, verticale, son équation est alors : $x = a$

Exemples :

- Si f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

.....

- Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$, étudier la dérivabilité de f en $a \in [0, +\infty[$.

.....

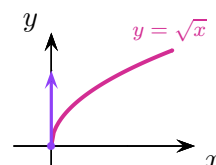
.....

.....

.....

.....

.....



- 1 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction f définie par $f(x) = x^n$, étudier la dérivabilité de f en $a \in \mathbb{R}$.

Propriété (Dérivable implique continue) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Dém. : 2 On écrit $f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) + f(a)$ puis on cherche la limite. □



La réciproque de ce théorème est fautive, il existe des fonctions continues en un point a qui ne sont pas dérivables en a .

Par exemple, on a montré que $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 alors que f est continue en 0.

1.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition (nombre dérivé à gauche et à droite) :

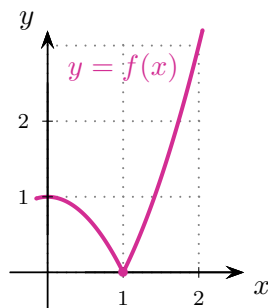
Soit $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ et une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est *dérivable à droite* en a lorsque la limite : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est réelle.

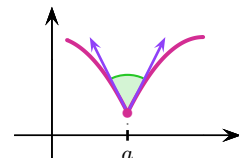
Dans ce cas, cette limite est appelée *nombre dérivé à droite* de f en a et est notée $f'_d(a)$.

- On dit que f est *dérivable à gauche* en a lorsque la limite : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est réelle. Dans ce cas, cette limite est appelée *nombre dérivé à gauche* de f en a et est notée $f'_g(a)$.

Exemple : Étudier la dérivabilité à gauche et à droite en 1 de $f(x) = |x^2 - 1|$, f est-elle dérivable en 1 ?



Dans une situation comme ci-dessus, f ne présente pas de tangente en a , mais deux *demi-tangentes* de pentes respectives $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$, on parle dans ce cas de *point anguleux*.



Propriété :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $a \in D$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, on suppose que f est définie à gauche et à droite de a . On a l'équivalence suivante :

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ avec} \\ \text{de plus } f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dém. : 3 On utilise le théorème faisant le lien entre limite et limites latérales d'une fonction. □

2 Dérivabilité

2.1 Fonction dérivée

Définition (fonction dérivée) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est *dérivable sur D* lorsque f est dérivable en a pour tout $a \in D$. Dans ce cas, on appelle *dérivée* de f , l'application $f' : x \mapsto f'(x)$.

L'ensemble des fonctions dérivables de D dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$.

2.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété :

Soit $D \subset \mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables sur D et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Somme** : $\lambda f + g$ est dérivable sur D et $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
- **Produit** : $f \times g$ est dérivable sur D et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- **Inverse et quotient** : Si g ne s'annule pas sur D alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur D et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Dém. : [4] On étudie la limite du taux d'accroissement des différentes fonctions. □

Propriété :

Soit D et E deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.

- **Composée** : $g \circ f$ est dérivable sur D et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Dém. : [5] On étudie la limite du taux d'accroissement en tout point $a \in D$. □

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

.....

.....

- Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2(1-x)}$. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

.....

.....

.....

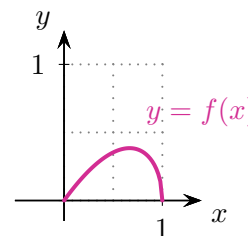
.....

.....

.....

.....

.....



La fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0, mais par composition, on peut quand même obtenir une fonction dérivable !

2.3 Dérivabilité de la bijection réciproque

Voici le théorème dont on dispose permettant de calculer la dérivée de la bijection réciproque f^{-1} lorsque f est une application bijective.

Théorème (Dérivabilité d'une application réciproque) :

Soit I et J deux intervalles et $f : I \rightarrow J$ une application continue et bijective. On considère $a \in J$ et on suppose que f est dérivable en $f^{-1}(a)$. On a alors l'équivalence :

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } a \quad \text{ssi} \quad f'(f^{-1}(a)) \neq 0$$

Et dans ce cas :

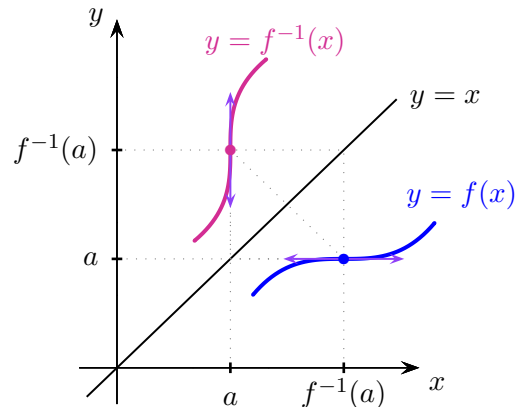
$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

Dém. : [6] On écrit le taux d'accroissement de f en $f^{-1}(a)$ puis on effectue le changement de variable $x = f^{-1}(y)$. □

Remarque :

Dans le cas où $f'(f^{-1}(a)) = 0$, f admet une tangente horizontale en $f^{-1}(a)$ et par symétrie des graphes, f^{-1} possède une tangente verticale en a .

f^{-1} n'est pas dérivable en a



Ce théorème permet de justifier les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques données au chapitre 7.

[7] **Exemple : Dérivabilité de la fonction arctan :** Justifions que $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Par définition, la fonction arctan est la bijection réciproque de $\tan_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

3.1 Extremum local et point critique

Définition (point intérieur à une partie) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in D$, on dit que a est un point *intérieur* à D s'il existe un voisinage V_a de a tel que $V_a \subset D$.



Soit une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, si a est un point intérieur à D , f est définie à gauche et à droite de a , il est donc possible d'étudier ses limites latérales et sa dérivabilité à gauche et à droite.

Exemples :

- L'ensemble des points intérieurs à $[0, 1[$ est $]0, 1[$. De manière général, si I est un intervalle, l'ensemble des points intérieurs à I est I privé de ses bornes.
- Quels sont les points intérieurs de $\mathbb{N}$? de $\mathbb{Q}$ (🤔)?

Définition (extremum local) :

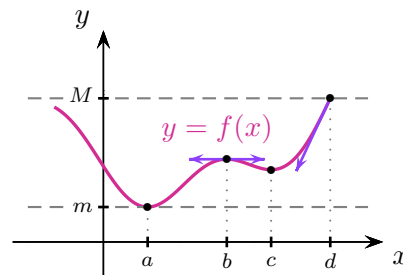
Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$.

- On dit que f admet un **maximum local** en a si f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a .
- On dit que f admet un **minimum local** en a si f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a .

Exemple :

La fonction f ci-contre, présente des maximums locaux en b et d et des minimums locaux en a et c .

De plus, le minimum local en a se trouve être en fait, le minimum de la fonction, le maximum local en d est le maximum de la fonction.

**Théorème (Condition nécessaire d'extremum local) :**

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à D .

Si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Un tel point, qui annule la dérivée, est appelé un **point critique** de f .

Dém. : [8] On étudie le signe du taux d'accroissement pour en déduire que $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ sont de signes contraires. □



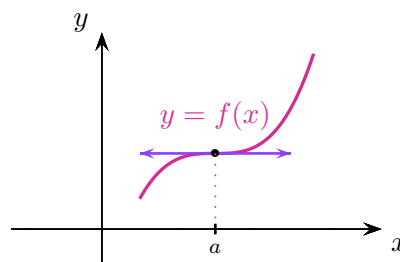
Si le point n'est pas un point intérieur, la fonction peut admettre un extremum en ce point sans qu'il soit critique, c'est-à-dire sans que la dérivée ne s'annule

C'est le cas dans l'exemple ci-dessus, le maximum M est atteint en d , point où la tangente n'est pas horizontale. En revanche les points intérieurs a , b et c sont effectivement des points critiques.



Être un point critique n'est pas une condition suffisante pour que la fonction admette un maximum en ce point.

Dans l'exemple ci-contre, a est un point critique, la tangente en ce point est horizontale, mais la fonction n'admet pas d'extremum en ce point.

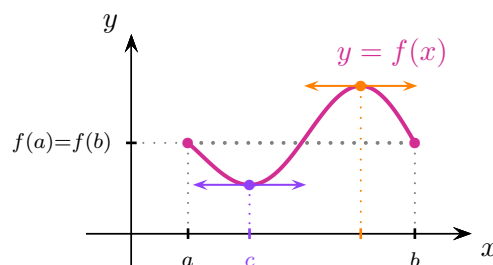
**3.2 Théorème de Rolle****Théorème (de Rolle) :**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ vérifiant $f(a) = f(b)$.

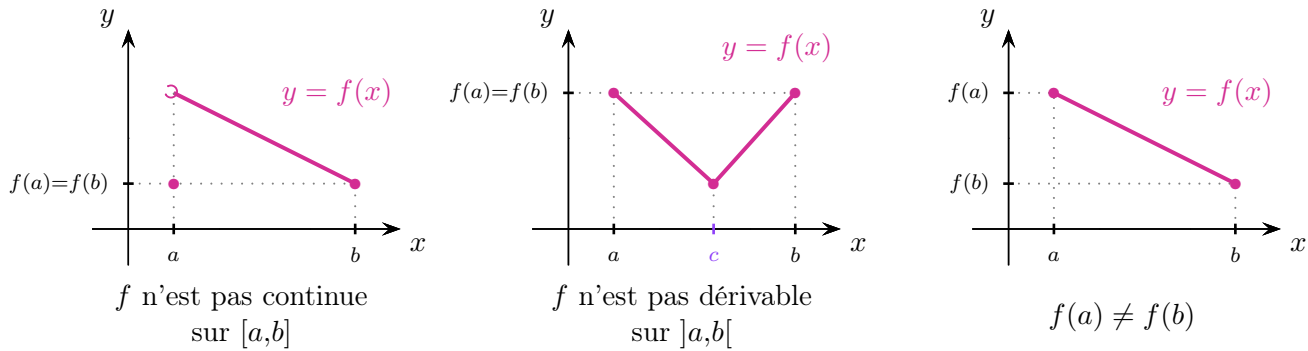
Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dém. : [9] On utilise d'abord le théorème des bornes atteintes du chapitre 18., puis la condition nécessaire d'extremum local [8]. □

Graphiquement, le théorème exprime qu'avec ces hypothèses, il existe toujours un point c où la tangente est horizontale.



Toutes les hypothèses du théorème sont importantes, si l'on en enlève une, on perd l'existence d'un point où la tangente est horizontale, c'est-à-dire un point critique.



Exemple : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que le polynôme $P = 4aX^3 + 3bX^2 + 2X - (a + b + 1)$ admet une racine réelle dans $[0, 1]$.

.....

.....

.....

.....

3.3 Théorème des accroissements finis

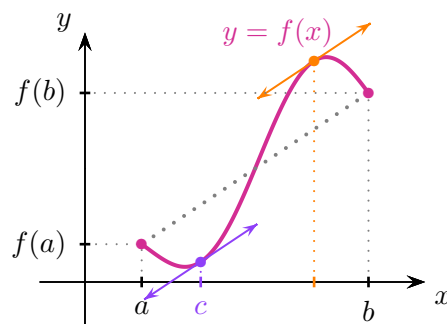
Théorème (des accroissements finis) :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dém. : [10] On pose $g(x) = f(x) - \alpha x$ où α est un réel choisi pour avoir $g(a) = g(b)$, on applique ensuite le théorème de Rolle [9]. $\square$

Graphiquement, le théorème exprime qu'avec ces hypothèses, il existe toujours un point c où la tangente est parallèle à la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Remarque : Par définition, on appelle *corde*, tout segment reliant deux points d'une courbe.

3.4 Conséquences du théorème des accroissements finis

3.4.1 Inégalité des accroissements finis

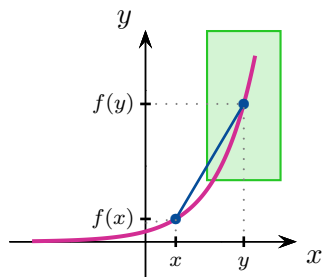
Définition (fonction lipschitzienne) :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *k-lipschitzienne* sur D si :

$$\forall (x, y) \in D^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

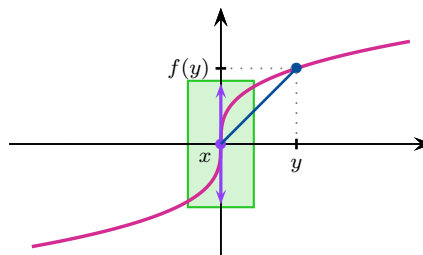
Si la fonction est k -lipschitzienne on a, pour $x \neq y$, $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$

Graphiquement, cela signifie que les pentes des cordes de f restent comprises entre $-k$ et k .



La fonction à gauche, ne semble pas être lipschitzienne, puisque l'on peut trouver, dans la partie coloriée, des cordes « aussi pentues que l'on veut » !

Cette fonction à droite non plus !



11 Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f est 1-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

.....

.....

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x}$, f est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$?

.....

.....

.....

.....

.....

On dispose d'un théorème pour nous aider à montrer qu'une fonction est lipschitzienne.

Théorème (Inégalité des accroissements finis) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe un réel k positif tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. On a alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Autrement dit, f est k -lipschitzienne sur I .

Dém. : **12** C'est une conséquence directe du théorème des accroissements finis **10**. □

Exemple : Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} x}$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

3.4.2 Application à l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

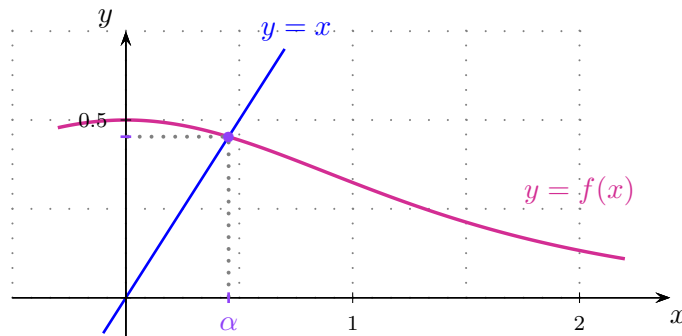
L'inégalité des accroissements finis et les fonctions lipschitziennes donnent une nouvelle méthode pour l'étude des suites récurrentes, voici un exemple.

Exemple : Reprenons la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} x}$$

On considère la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$



1. On admet que f possède un unique point fixe $\alpha > 0$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

.....

.....

2. Montrer par récurrence que la propriété $P_n : \left| u_n - \alpha \right| \leq \frac{\alpha}{2^n}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que (u_n) converge.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.4.3 Fonctions constantes, monotones, strictement monotones

Théorème (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) :

Soit I un **intervalle** et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, on a l'équivalence suivante :

f est constante sur I ssi f' est nulle sur I

Dém. : 13 $\Rightarrow$: Déjà expliqué dans l'exemple de la page 1.

$\Leftarrow$: On applique l'inégalité des accroissements finis. □



Il est important que I soit un **intervalle** !

Sinon comme le montre l'exemple qui suit, une fonction peut ne pas être constante et avoir quand même une dérivée nulle.

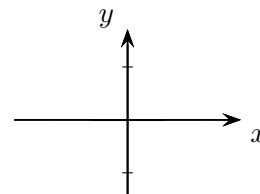
Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que f est dérivable et que f' est nulle, f est-elle constante sur $\mathbb{R}^*$?

.....

.....

.....

.....



Théorème (Caractérisation des fonctions monotones dérivables) :

Soit I un **intervalle** et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, on a l'équivalence suivante :
 f est croissante (resp. décroissante) sur I **ssi** f' est positive (resp. négative) sur I

Dém. : **14** La démonstration est la même que la démonstration précédente en remplaçant les égalités nulles par des inégalités. $\square$

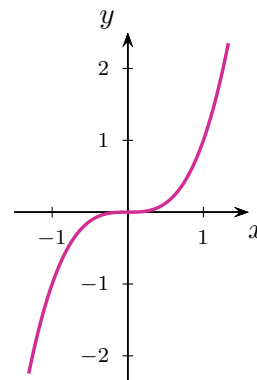
Théorème (Fonctions strictement monotones dérivables) :

Soit I un **intervalle** et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, on a l'implication suivante :
Si f' est positive (resp. négative) sur I et **si** f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois **alors** f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I .

Dém. : **15** **admis** $\square$

Exemple : Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

.....

**3.4.4 Théorème de la limite de la dérivée****Théorème (de la limite de la dérivée) :**

Soit I un intervalle, $a \in I$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

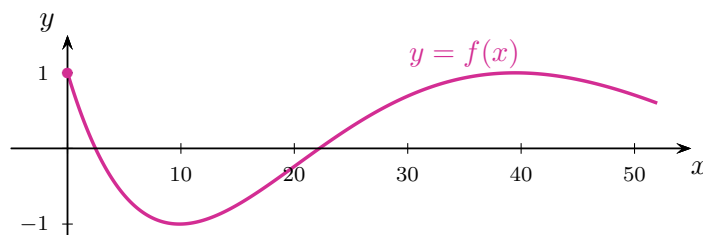
En particulier, si ℓ est réel, on peut conclure que f est dérivable en a , donc sur I tout entier, que $f'(a) = \ell$ et que f' est continue en a .

Dém. : **16** On applique le théorème des accroissements finis **10** à f sur l'intervalle $[a, x]$ ou $[x, a]$, il existe alors c_x tel que $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a)$, puis on fait tendre x vers a . $\square$



Ce théorème donne également une autre façon d'étudier la dérivabilité d'une fonction en un point, on peut soit étudier la **limite du taux d'accroissement**, soit étudier la **limite de la dérivée**.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geq 0, f(x) = \cos(\sqrt{x})$



Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée et préciser $\lim_0 f'$.

.....

Étudier la dérivabilité de f en 0, préciser l'équation de la tangente à f en 0.

.....

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition (dérivées successives) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)}$ existe et est dérivable sur D , on pose $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$. Si elle est définie, la fonction $f^{(k)}$ s'appelle la *dérivée k^e* ou *dérivée d'ordre k* de f , on dit dans ce cas que f est *k fois dérivable*.

Remarque : Au chapitre 7., nous avons déjà défini la dérivée seconde d'une fonction, on a en fait : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc...

Définition (classe $\mathcal{C}^k$, classe $\mathcal{C}^\infty$) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et une application $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$* sur D lorsque f est k fois dérivable sur D et $f^{(k)}$ est continue sur D . L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^k$ sur D est noté $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$.
- On dit que f est *de classe $\mathcal{C}^\infty$* sur D lorsque f est dérivable sur D autant de fois que l'on veut. L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D est noté $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$.

Et les fonctions usuelles, de quelle **classe** sont-elles ?



Les fonctions polynomiales, fonctions rationnelles (quotient de polynômes), valeur absolue, ln, exponentielles ($x \mapsto a^x$, $a > 0$), puissances ($x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$), trigonométriques (sin, cos, tan), trigonométriques réciproques (arcsin, arccos, arctan), hyperboliques (ch, sh, th) sont toutes **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur leur domaine de **dérivabilité**.

17 Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin x$, montrer par récurrence la propriété

$$P_k : \langle \forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \rangle$$

Propriété (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on considère deux applications réelles f et g de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur D .

- **Somme :** $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur D .
- **Produit :** $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur D .
- **Quotient :** Si g ne s'annule pas sur D alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur D .

Propriété (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$) :

Soit D et E deux parties de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

On considère $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$).

- **Composée** : $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur D .

Dém. : [18] Les deux propriétés précédentes se démontrent par récurrence. □



Dans les deux propriétés précédentes, il est également possible de remplacer l'expression « de classe $\mathcal{C}^k$ » par l'expression « k fois dérivable » : une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions k fois dérivable est encore k fois dérivable.

En plus de cette propriété, on dispose de formules permettant de calculer la dérivée d'ordre k d'une somme et d'un produit, on retrouve la formule de Leibniz vue au chapitre 16.

Propriété (Dérivée d'ordre k d'une somme, formule de Leibniz) :

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on considère deux applications réelles f et g k fois dérivable sur D .

- **Somme** : $(\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}$
- **Produit** : $(f \times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} \times g^{(k-i)}$ (Formule de Leibniz)

Dém. : [19] Ces formules se prouvent par récurrence. □

[20] **Exemple** : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^x$.

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que
- Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(k)}$ à l'aide de la formule de Leibniz.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété (Réciproque d'une bijection de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$) :

Soit I et J deux intervalles et $k \in \mathbb{N}^*$.

On considère $f : I \longrightarrow J$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$), on suppose de plus que f' NE S'ANNULE PAS sur I .

- **Réciproque** : f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur J .

Dém. : [21] Se démontre par récurrence. □

5 Extension aux fonctions complexes

On considère une fonction f définie sur un intervalle I , à valeurs complexes. f peut donc s'écrire sous forme algébrique :

$$\forall x \in I, f(x) = (\operatorname{re}(f))(x) + i (\operatorname{im}(f))(x)$$

Reprenons la définition déjà donnée au chapitre 7., concernant la dérivabilité et complétons-la par la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition (dérivée d'une fonction complexe, fonction de classe $\mathcal{C}^1$) :

- On dit que f est *dérivable* sur I si les deux fonctions réelles $\operatorname{re}(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ le sont et on pose :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = (\operatorname{re}(f))'(x) + i (\operatorname{im}(f))'(x)$$
- On dit que f est *de classe $\mathcal{C}^1$* sur I si f' est continue sur I , ce qui revient à demander que les deux fonctions réelles $\operatorname{re}(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ soient de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple : Soit la fonction complexe f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ix}$.

- Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

.....

- Calculer $f(0)$, $f(2\pi)$, est-ce que f' s'annule sur $[0, 2\pi]$?

.....

Finalement ce que prouve cet exemple c'est que :



Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont **FAUX** pour une fonction à valeurs complexes.

En revanche on dispose d'une version de l'inégalité des accroissements finis lorsque la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème (Inégalité des accroissements finis, cas complexe) :

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction *de classe $\mathcal{C}^1$* . On suppose qu'il existe un réel k positif tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. On a alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Dém. : 22 admis Il suffit d'intégrer f' puis de majorer, il sera possible de démontrer les choses précisément au chapitre 28. □