

# Convexité

Dans tout ce chapitre, les fonctions sont définies sur  $I$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

## 1 Fonction convexe, fonction concave

### 1.1 Définition

Commençons par justifier le résultat suivant.

#### Propriété :

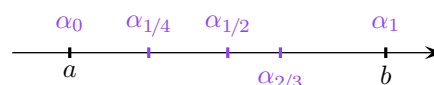
Soit  $a < b$  deux réels, on a l'équivalence suivante :

$$\alpha \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } \alpha = (1-\lambda)a + \lambda b$$

Dém. :  $\boxed{1} \Rightarrow$  : on pose  $\lambda = (\alpha - a)/(b - a)$  rapport entre la distance de  $\alpha$  à  $a$  et la longueur du segment  
 $\Leftarrow$  : on prouve que  $\alpha \geq a$  et  $\alpha \leq b$ .  $\square$

On a ainsi une paramétrisation du segment  $[a, b]$  :

lorsque  $\lambda$  parcourt l'intervalle  $[0, 1]$ , le réel  $\alpha_\lambda = (1-\lambda)a + \lambda b$  parcourt le segment  $[a, b]$ .



#### Définition (fonction convexe/concave) :

Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  est *convexe* si l'on a :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

- On dit que  $f$  est *concave* si l'on a :

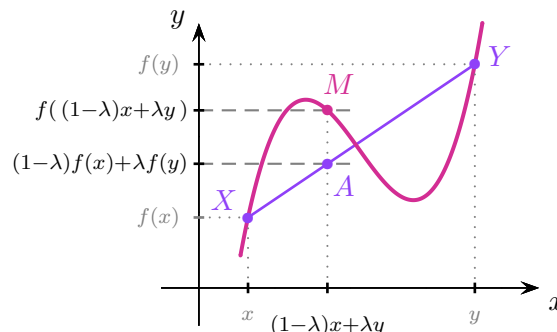
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

ce qui équivalent à dire que  $-f$  est convexe.

#### Interprétation graphique :

On appelle *corde* tout segment reliant deux points de la courbe.

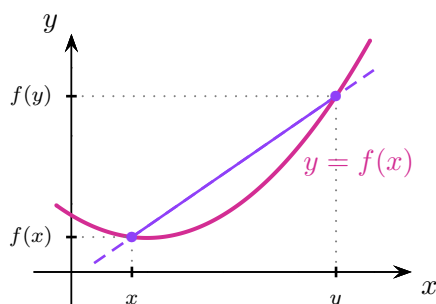
D'après le théorème de Thalès, le point  $A$  de la corde  $[XY]$  d'abscisse  $(1-\lambda)x + \lambda y$  a pour ordonnée  $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$



La fonction ci-contre n'est pas une fonction convexe, la condition n'est pas respectée : le point  $M$  de la courbe, d'abscisse  $(1-\lambda)x + \lambda y$  ne doit pas être situé au-dessus du point  $A$  de la corde.

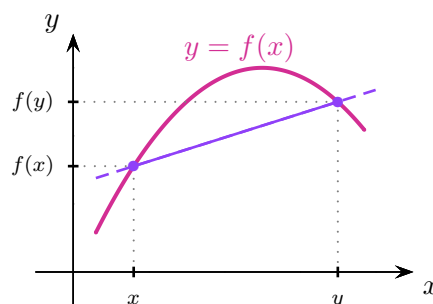
Ce n'est pas non plus une fonction concave puisque la condition «  $\forall \lambda \in [0, 1]$  » impose que tous les points de l'arc de courbe soient au-dessus de la corde, et ceci pour toutes les cordes puisque l'on a également la condition «  $\forall (x, y) \in I^2$  ».

Une fonction **convexe** :



Tout arc de la courbe est en-dessous de sa corde

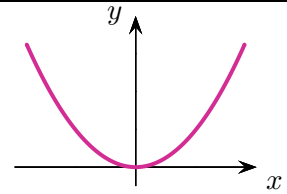
Une fonction **concave** :



Tout arc de la courbe est au-dessus de sa corde

**Exemple :** Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

On utilisera que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2xy \leq x^2 + y^2$ .



## 1.2 Croissance des pentes

### 1.2.1 Une caractérisation de la convexité

On dispose de cette caractérisation de la convexité appelée : « croissance des pentes ».

**Propriété :**

Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  est convexe sur  $I$  ssi  $\forall a \in I$ , la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$

Dém. : [2]  $\Rightarrow$  : L'inégalité de convexité permet de montrer que  $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$  pour  $x \leq y$ .

$\Leftarrow$  : On utilise la croissance de  $\tau_a$ , avec  $a = (1-\lambda)x + \lambda y$ . □

### 1.2.2 Lemme des trois pentes

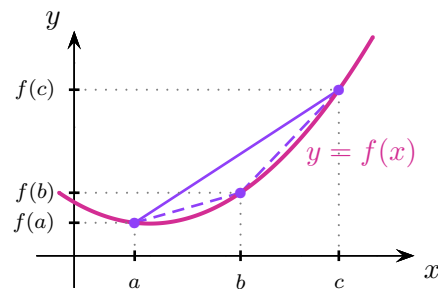
**Propriété (Lemme des trois pentes) :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, pour tout  $(a, b, c) \in I^3$  tel que  $a < b < c$ , on a :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Dém. : [3] Une conséquence de la propriété [2] précédente,  $\tau_a$  et  $\tau_c$  sont croissantes. □

Le lemme précédent compare la pente des trois cordes du dessin ci-contre.

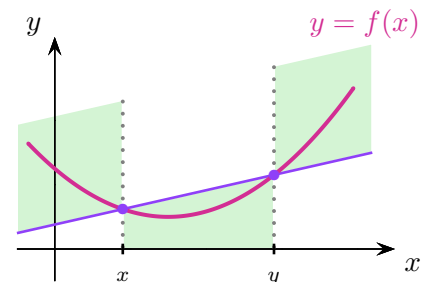


## 1.3 Position du graphe par rapport à ses sécantes

On appelle *sécante* tout droite passant par deux points de la courbe.

On considère une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe.

Soit  $(x, y) \in I^2$  tel que  $x < y$  : le graphe de  $f$  est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle  $[x, y]$  et au-dessus à l'extérieur de l'intervalle  $[x, y]$ .



Dém. : [4] Pour  $t \geq y$ , cela revient à montrer que  $f(t) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t - x) + f(x)$ . □

5 **Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application convexe, strictement croissante, montrer que  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

.....

.....

.....

.....

## 1.4 Inégalité de Jensen

**Théorème (Inégalité de Jensen) :**

On considère  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , on a alors l'inégalité :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Dém. : 6 Se démontre par récurrence en utilisant l'inégalité de la définition de la convexité.  $\square$

**Remarque :** Très souvent en exercice, on utilise l'inégalité dans le cas particulier où  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i = \frac{1}{n}$ ,

on a bien  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , l'inégalité devient alors :  $f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

## 2 Convexité et dérivabilité

### 2.1 Fonctions dérivables

Pour les fonctions dérivables, on dispose d'une autre caractérisation de la convexité en étudiant les variations de  $f'$ .

**Propriété :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, on a l'équivalence suivante :

$f$  est convexe sur  $I$  **ssi**  $f'$  est croissante sur  $I$

Et dans ce cas, la courbe de  $f$  est située au-dessus de ses tangentes.

Dém. : 7  $\Rightarrow$  : C'est une conséquence du lemme des trois pentes 3

$\Leftarrow$  : Soit  $a \in I$ , on commence par étudier le signe de  $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$   $\square$

Il existe également une version analogue de cette propriété pour les fonctions concaves.

**Propriété :**

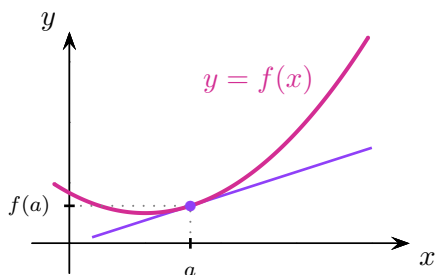
Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, on a l'équivalence suivante :

$f$  est concave sur  $I$  **ssi**  $f'$  est décroissante sur  $I$

Et dans ce cas, la courbe de  $f$  est située en-dessous de ses tangentes.

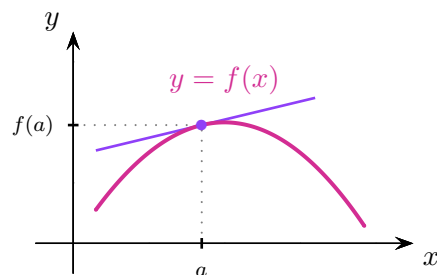
Dém. : 8 Se déduit du théorème précédent car si  $f$  est concave,  $-f$  est convexe.  $\square$

Une fonction **convexe** :



La courbe est au-dessus de ses tangentes

Une fonction **concave** :



La courbe est en-dessous de ses tangentes

**Exemple :**

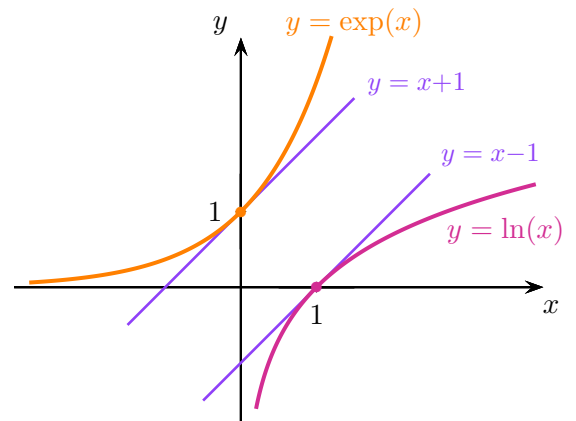
1. Étudier la convexité des fonctions exp et ln.

.....

.....

.....

.....



2. Justifier les inégalités suivantes, déjà rencontrées au chapitre 7. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leq x - 1$$

.....

.....

**9 Exemple :** Inégalité arithmético-géométrique.

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , des réels strictement positifs ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), montrer que :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

.....

.....

.....

.....

## 2.2 Fonctions deux fois dérivables

Pour une fonction deux fois dérivable, on dispose d'une autre caractérisation de la convexité.

**Propriété :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on a l'équivalence suivante :  
 $f$  est convexe (resp. concave) sur  $I$  **ssi**  $f''$  est positive (resp. négative) sur  $I$

Dém. : **10** Le signe de  $f''$  donne les variations de  $f'$ , on utilise la propriété **7** □

**Définition (point d'inflexion) :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a$  un point intérieur à  $I$ . On dit que  $a$  est un *point d'inflexion* de  $f$  lorsque  $f$  change de sens de convexité en ce point.



Autrement dit, pour une fonction deux fois dérivables, les points d'inflexion correspondent aux points où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

**Exemple :** Points d'inflexion de la fonction arctan.

.....

.....

.....

.....

