

Intégration sur un segment

Comme toujours, dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on considère des applications définies de I dans $\mathbb{K}$, I désignant un intervalle de $\mathbb{R}$. De plus quand on écrit $[a, b]$, on suppose que l'on a $a \leq b$.

1 Continuité uniforme

Définition (fonction uniformément continue) :

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Aux chapitres 17. et 18., nous avons parlé de fonction *continue* sur I , on sait que f est continue sur I si elle est continue en tout point y de I , c'est-à-dire si :

$$\forall y \in I, \forall \varepsilon > 0, \dots\dots\dots$$

La différence réside dans l'ordre des choses : la place de « $\exists \alpha > 0$ » par rapport à « $\forall y \in I$ ».

Pour la continuité, le réel α dépend du point y où l'on étudie la fonction alors que pour être *uniformément continue*, le **MÊME** α doit convenir pour tous les $y \in I$.

Propriété :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est uniformément continue sur I alors f est continue sur I .

Dém. : [1] D'après les définitions, s'il existe un α valable pour tous les points, il existe un α valable pour chaque point. $\square$

En revanche la réciproque de l'implication du théorème est fausse, il existe des fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues.

Pour l'étudier sur un exemple, on utilise la négation de la définition :



Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$

s'il existe $\dots\dots\dots$

alors f n'est pas uniformément continue sur I .

[2] **Exemple :** Étudier la continuité uniforme de la fonction $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

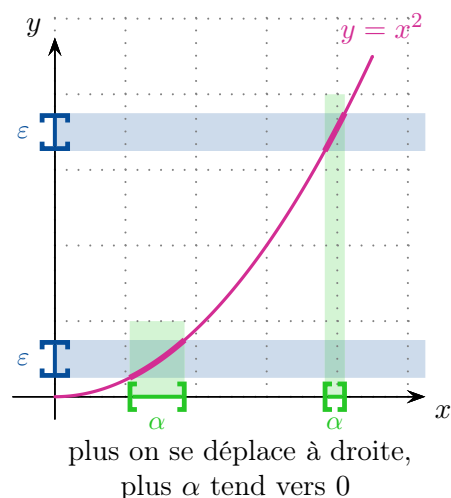
Prenons $\varepsilon = 1$, $\alpha > 0$ et posons $y = \frac{1}{\alpha}$ et $x = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}$, on a alors :

$$|f(x) - f(y)| = \dots\dots\dots$$

$$|x - y| = \dots\dots\dots$$

Donc :

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$



Propriété :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I .

Dém. : [3] On écrit la définition d'une fonction k -lipschitzienne, α s'obtient en posant $\alpha = \varepsilon/k$. $\square$

Finalement, on dispose du théorème suivant.

Théorème (de Heine) :

Toute fonction continue sur un SEGMENT est uniformément continue sur ce segment.

Dém. : 4 admis Admettons ce théorème qui se démontre par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass vu au chapitre 11. □

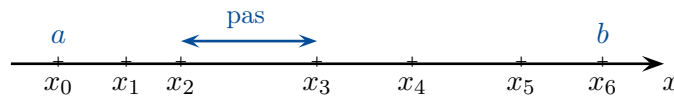
2 Intégrale d'une fonction en escalier

2.1 Subdivision d'un segment

Définition (subdivision d'un segment, pas d'une subdivision) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *subdivision* d'un segment $[a, b]$ toute famille $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $n+1$ réels tels que : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On appelle *pas* de la subdivision σ le réel $\max_{0 \leq p \leq n-1} (x_{p+1} - x_p)$.

Une subdivision permet de découper le segment $[a, b]$ en n segments $[x_p, x_{p+1}]$, le pas de la subdivision étant la longueur du plus grand des segments.



Exemple : Un exemple de subdivision très utilisée consiste à découper le segment $[a, b]$ en n intervalles de même longueur, on pose pour cela :

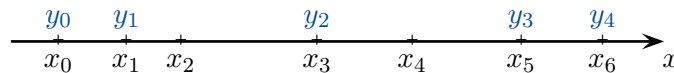
$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_p = a + p \frac{b-a}{n}$$

On parle dans ce cas de subdivision *régulière*, le pas est ici égal à $\frac{b-a}{n}$.

Définition (subdivision plus fine) :

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ et $\tau = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ deux subdivisions de $[a, b]$, on dit que σ est *plus fine* que τ lorsque $\{y_0, y_1, \dots, y_m\} \subset \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Ce qui est le cas sur le dessin ci-dessous, la subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_6)$ est plus fine que $(y_0, y_1, \dots, y_4)$.



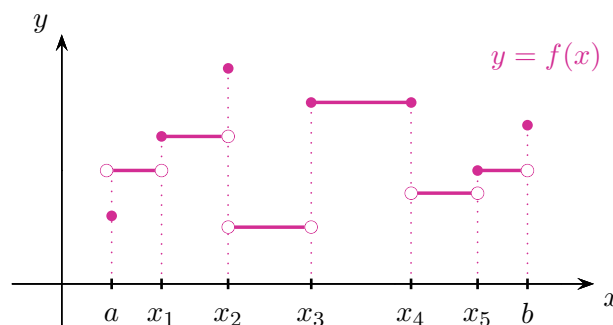
2.2 Fonctions en escalier

Définition (fonction en escalier, subdivision adaptée) :

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur $]x_p, x_{p+1}[$ pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Une telle subdivision σ est dite *adaptée* à f . L'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Voici un exemple de fonction en escalier :



Remarques :

- La définition n'impose rien sur $f(x_p)$, la fonction peut être continue à gauche ou à droite en x_p ou pas.

- Il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée à une fonction en escalier, toute subdivision plus fine convient également.

Exemple : La fonction partie entière (voir chapitre 3.) est une fonction en escalier sur tout segment.

2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Propriété - Définition (intégrale d'une fonction en escalier) :

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f , on suppose que pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f prend la valeur y_p sur l'intervalle $]x_p, x_{p+1}[$.

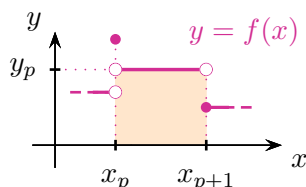
Dans ce cas, l'expression $\sum_{p=0}^{n-1} y_p(x_{p+1} - x_p)$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie. On

l'appelle alors *intégrale* de f sur $[a, b]$ et on note :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t) dt = \sum_{p=0}^{n-1} y_p(x_{p+1} - x_p)$$

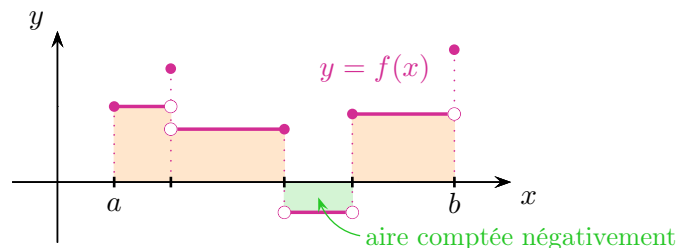
Dém. : [5] Notons I_σ l'intégrale calculée à partir de la subdivision σ .

On commence par montrer que si τ est plus fine que σ alors $I_\sigma = I_\tau$, on en déduit que pour deux subdivisions quelconques, $I_\sigma = I_{\sigma \cup \tau} = I_\tau$. $\square$



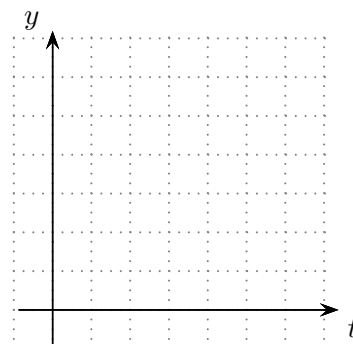
Dans le cas d'une fonction réelle, l'expression $y_p(x_{p+1} - x_p)$ correspond à l'aire algébrique d'une « des marches d'escalier ».

L'intégrale d'une fonction en escalier réelle, qui consiste à faire la somme des « aires algébriques de toutes les marches », correspond alors à l'aire algébrique « sous la courbe ».



[6] **Exemple :** Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $I = \int_{[0,n]} [t] dt$

.....



2.4 Fonctions continues par morceaux

Définition (fonction continue par morceaux) :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

f est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \left| \begin{array}{l} \cdot f \text{ est continue sur }]x_p, x_{p+1}[\\ \cdot f|_{]x_p, x_{p+1}[} \text{ admet un prolongement continu à } [x_p, x_{p+1}] \end{array} \right.$$

Une telle subdivision σ est dite *adaptée* à f . L'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$.

Exemple : Étudier la continuité par morceaux de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par :

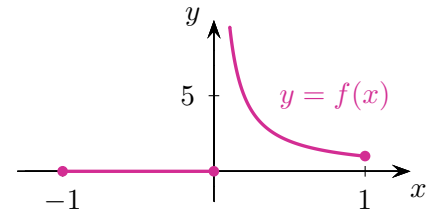
$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....



Les fonctions en escalier, les fonctions continues sont des fonctions continues par morceaux, on peut écrire : $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$, de plus :

Propriété :

$\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Dém. : [7] Il suffit de prouver les stabilités par combinaison linéaire et par produit. $\square$

2.5 Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

Dans cette partie, on construit l'intégrale d'une fonction **réelle** continue par morceaux, le cas d'une fonction à valeurs complexes sera étudié juste après.

2.5.1 Approximation uniforme par les fonctions en escalier

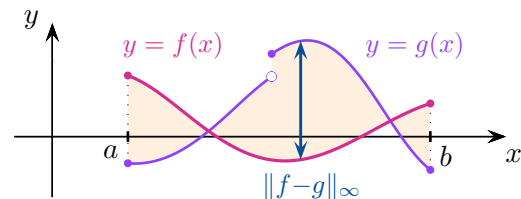
Définition (distance uniforme entre deux fonctions) :

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, on appelle *distance uniforme* entre f et g le réel :

$$\|f - g\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

Ce réel étant bien défini car il est possible de justifier qu'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est bornée.

La distance uniforme mesure le plus grand écart qui existe entre deux courbes.



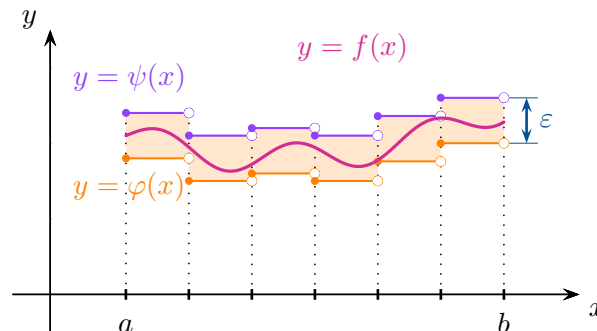
Voici le théorème dont on dispose, il permet ensuite de construire l'intégrale des fonctions continues par morceaux à partir de celle des fonctions en escalier.

Théorème (Approximation uniforme par les fonctions en escalier) :

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \|\varphi - \psi\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Dém. : [8] La démonstration repose sur le théorème de Heine [4]. $\square$



D'après ce théorème, il est toujours possible d'encadrer une fonction f continue par morceaux par deux fonctions en escalier φ et ψ dont la distance uniforme est plus petite qu'un $\varepsilon > 0$ donné.

2.5.2 Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

On sait calculer l'intégrale d'une fonction en escalier, on sait encadrer toute fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier « aussi proche » que l'on veut, il est maintenant possible de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème (Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux) :

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, on note :

$$\mathcal{I}_-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } f \leq \psi \right\}$$

Ces ensembles contiennent les valeurs des intégrales de toutes les fonctions en escalier plus petites que f pour le premier et plus grandes que f pour le second.

Alors $\mathcal{I}_-(f)$ admet une borne supérieure, $\mathcal{I}_+(f)$ admet une borne inférieure et on a :

$$\sup \mathcal{I}_-(f) = \inf \mathcal{I}_+(f)$$

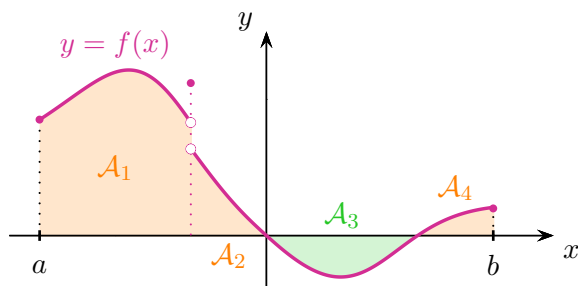
Dém. : [9] Ce théorème est une conséquence directe du théorème précédent [8] et des résultats sur les bornes supérieures et inférieures du chapitre 3. $\square$

Définition (intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux) :

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t) dt = \sup \mathcal{I}_-(f) = \inf \mathcal{I}_+(f)$$

Remarque : Cette construction de l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ à partir de celle des fonctions en escalier, permet de conserver la notion d'aire algébrique « sous la courbe » représentative de f .



$$\int_{[a,b]} f = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4$$

2.6 Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux

Il est facile d'étendre la définition précédente au cas des fonctions à valeurs complexes.

Définition (intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux) :

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$, on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{re}(f) + i \int_{[a,b]} \operatorname{im}(f)$$

D'après cette définition, on a directement :

$$\operatorname{re} \left(\int_{[a,b]} f \right) = \int_{[a,b]} \operatorname{re}(f), \quad \operatorname{im} \left(\int_{[a,b]} f \right) = \int_{[a,b]} \operatorname{im}(f) \quad \text{et} \quad \overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \overline{f}$$

2.7 Extension des notations

Soit deux réels $a \leq b$ et $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$, voici une autre façon de noter l'intégrale :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

Cette notation est pratique puisque il n'y a plus besoin de réfléchir au « sens » des bornes, il est même possible de les « inverser » s'il le faut.

2.8 Propriétés de l'intégrale

On admet tous les résultats de cette partie, pour les justifier, on commence par démontrer le résultat pour une fonction en escalier avant de le démontrer pour une fonction continue par morceaux.

Propriété (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux) :

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$, a , b et c trois éléments de I .

- **Linéarité** : Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
- **Inégalité triangulaire** : On suppose $a \leq b$, alors : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
- **Relation de Chasles** : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- **Égalité** : Si f et g sont égales sur I sauf en un nombre fini de points alors $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Dém. : 10 admis

□

On dispose également de propriétés supplémentaires pour des fonctions à valeurs réelles.

Propriété (Propriétés de l'intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux) :

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$, a et b deux éléments de I vérifiant $a \leq b$.

- **Positivité** : Si f est positive alors $\int_a^b f \geq 0$.
- **Croissance** : Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- **Positivité stricte** : Si $f > 0$ et si $a < b$ alors $\int_a^b f > 0$.
- **Nullité** : Si f est continue, positive, si $a < b$ et si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

Dém. : 11 admis

□



Attention aux hypothèses de ces propriétés, certaines nécessitent d'avoir $a \leq b$, d'autres nécessitent même d'avoir $a < b$.

Exemples :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{[0,1]} \frac{x^n}{1+x^2} dx$, montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

.....

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{1+xt} dt$, montrer que f est décroissante.

.....

Propriété (Intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique) :

- **Fonctions paires ou impaires** : Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{C}_m([-a, a], \mathbb{R})$.

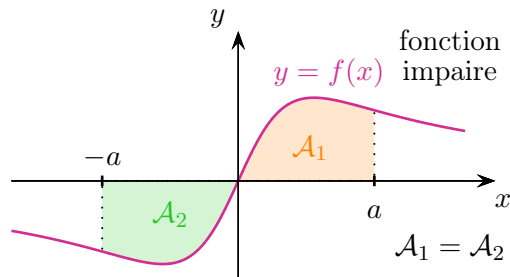
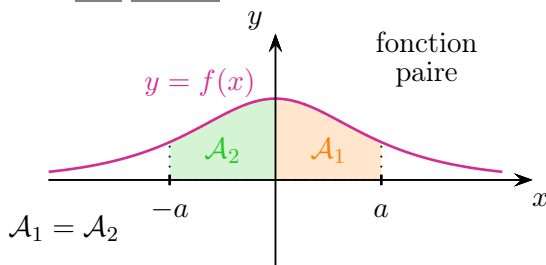
Si f est impaire, on a : $\int_{-a}^a f = 0$ Si f est paire, on a : $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$

- **Fonctions périodiques** : Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T -périodique.

pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$

Dém. : 12 admis

□



Une définition pour terminer cette partie.

Définition (valeur moyenne d'une fonction) :

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ avec $a < b$, on définit la *valeur moyenne* de f comme étant égale à :

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(t) dt$$

3 Lien entre intégrale et primitive

Faisons maintenant le lien entre l'intégrale qui vient d'être définie et le calcul des primitives du chapitre 9., justifions pour cela le théorème suivant qui s'applique pour une fonction *continue*.

Théorème (fondamental de l'analyse) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in I$.

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I , de dérivée f .

En conséquence, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I , la fonction F précédente étant l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Dém. : 13 On prouve que pour tout $x \neq b$, $\frac{F(x) - F(b)}{x - b} - f(b) = \frac{1}{x - b} \int_b^x (f(t) - f(b)) dt$.

La définition de la continuité de f en b permet alors d'en déduire la limite du taux d'accroissement de F . □

En conséquence également, on retrouve la méthode de calcul d'une intégrale vue au chapitre 9..

Corollaire (Calculs d'intégrales de fonctions continues) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, a et b deux éléments de I , F une primitive de f sur I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Dém. : 14 Conséquence du théorème précédent. □

15 **Exemple** : Soit $\varphi(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$, montrer que φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

.....

.....

.....

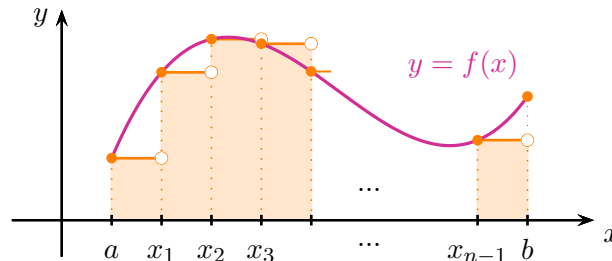
4 Sommes de Riemann

Théorème (des sommes de Riemann) :

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$, on a alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f\left(a + p \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Graphiquement, la somme de Riemann représente la somme des aires algébriques des rectangles tracés sur la subdivision régulière $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ en n intervalles.



Le théorème énonce que « plus on augmente le nombre n de rectangles, plus la somme des aires des rectangles se rapproche de l'aire sous la courbe ».

Dém. : [16] Dans le cas d'une fonction lipschitzienne, en posant $x_p = a + p \frac{b-a}{n}$, on établit que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p) \right| = \left| \sum_{p=0}^{n-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} (f(t) - f(x_p)) dt \right|$$

La lipschitziannité permet alors de majorer cette différence. □

Souvent dans les exercices, on utilise le cas particulier suivant.

Corollaire (Théorème des sommes de Riemann) :

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_m([0, 1], \mathbb{K})$, on a alors : $\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$

Dém. : [17] Il suffit de poser $a = 0$ et $b = 1$ dans le théorème des sommes de Riemann. □

[18] **Exemple** : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + p^2}$

.....

.....

.....

.....

5 Formules de Taylor globales

Au chapitre 21., on a rencontré la formule de Taylor-Young qui donne une information locale, c'est-à-dire au voisinage d'un point, pour une fonction.

5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral d'ordre n) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, a et b deux éléments de I , on a :

$$f(b) = \sum_{p=0}^n \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (b-a)^p + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Dém. : [19] Se démontre par récurrence sur n . □

Écrit en extension, et en posant $b = x$, la formule devient :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

La première partie de la formule est une fonction polynomiale de degré n appelée *polynôme de Taylor* de f en a d'ordre n . La seconde partie constitue le *reste intégral* de la formule.

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange d'ordre n) :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, a et b deux éléments de I .

On suppose qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$, on a alors :

$$\left| f(b) - \sum_{p=0}^n \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (b-a)^p \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dém. : [20] Se démontre à partir de la formule de Taylor avec reste intégral [19]. □

[21] **Exemple :** Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{z^p}{p!} = e^z$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....