

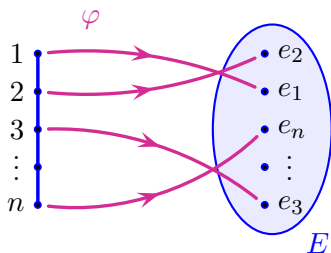
Dénombrement

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition

Définition (ensemble *fini*, *cardinal* d'un ensemble) :

Un ensemble non vide E est dit *fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection φ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E . Un tel entier n est alors unique, il est appelé *cardinal* de E et est noté $\text{card}(E)$.



Si l'on pose $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i = \varphi(i)$, on peut alors écrire que :

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Cette bijection φ permet de numéroté les éléments de E et pouvoir ainsi les compter. $\text{card}(E)$ correspond alors à l'intuition que l'on en a, il s'agit du nombre d'éléments de l'ensemble.

Remarques :

- Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini et $\text{card}(\emptyset) = 0$.
- Le cardinal d'un ensemble peut être noté de plusieurs manières, on rencontre les notations suivantes :

$$\text{card}(E) = |E| = \#E$$

En complément de la définition on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème (Équipotence et cardinal) :

Soit E et F deux ensembles finis, on a l'équivalence suivante :

$$\text{Il existe une bijection de } E \text{ dans } F \Leftrightarrow \text{card}(E) = \text{card}(F)$$

Dém. : 1 $\Leftarrow$: S'il existe deux bijections $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$ et $\psi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow F$, on considère $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.
 $\Rightarrow$: Soit $n = \text{card}(E)$, il existe une bijection $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$ et par hypothèse $f : E \rightarrow F$, on considère $\psi = f \circ \varphi$. □

Propriété :

Soit E un ensemble fini et $F \subset E$. Alors F est un ensemble fini et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.

On a de plus l'équivalence : $F = E \Leftrightarrow \text{card}(F) = \text{card}(E)$.

Dém. : 2 Se prouve par récurrence sur $n = \text{card}(E)$. □

1.2 Opérations sur les cardinaux

Commençons par justifier ce premier résultat.

Propriété :

Soit E un ensemble fini, A et B deux sous-ensembles de E .

- **Union disjointe** : Si A et B sont disjoints alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Dém. : 3 Il existe deux bijections $\varphi : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow A$ et $\psi : \llbracket 1, q \rrbracket \rightarrow B$, avec lesquelles on construit une bijection de $\llbracket 1, p+q \rrbracket$ dans $A \cup B$. □

Et utilisons ce premier résultat pour justifier ceux qui suivent.

Propriété :

Soit E un ensemble fini, A et B deux sous-ensembles de E .

- **Différence** : $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$
- **Complémentaire** : $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$
- **Union** : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Dém. : [4] • $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ et cette réunion est disjointe.
• On peut écrire que $\overline{A} = E \setminus A$, et utiliser le point précédent.
• $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, puis $B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$ et ces réunions sont disjointes. $\square$

Exemple : Soit E un ensemble fini, A , B et C trois sous-ensembles de E , exprimer $\text{card}(A \cup B \cup C)$ en fonction des cardinaux des ensembles et de leurs intersections.

Propriété :

Soit E un ensemble fini, $A_1, \dots, A_n$ une famille de n sous-ensembles de E disjoints deux à deux.

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card}(A_i)$$

Dém. : [5] Se prouve par récurrence sur n . $\square$

Un dernier résultat pour finir cette partie.

Propriété :

Soit E et F deux ensembles finis.

- **Produit cartésien :** $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

Dém. : [6] Si $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, notons $E_i = \{(e_i, y), y \in F\}$, on prouve que $\text{card}(E_i) = \text{card}(F)$ et que $E \times F = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)$, cette réunion étant disjointe la propriété [5] s'applique. $\square$

Cette propriété se généralise pour un produit cartésien de n ensembles.

Propriété :

Soit $E, E_1, \dots, E_n$ une famille d'ensembles finis ($n \in \mathbb{N}^*$).

- **Produit cartésien :** $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \dots \times \text{card}(E_n)$
 $\text{card}(E^n) = (\text{card}(E))^n$

Dém. : [7] Se démontre par récurrence sur n . $\square$

1.3 Cardinaux et applications

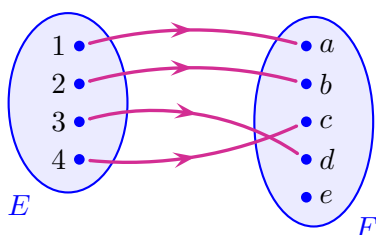
Propriété :

Soit E et F deux ensembles finis.

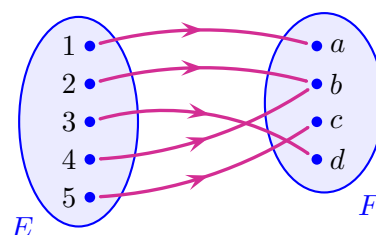
- S'il existe une application injective $f : E \longrightarrow F$ alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
- S'il existe une application surjective $f : E \longrightarrow F$ alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.

Dém. : [8] • f réalise une bijection de E dans $f(E)$, on utilise ensuite les résultats [1] et [2].
• [admis] On admet ce deuxième point. $\square$

Voici un dessin pour illustrer le théorème précédent.



Une application injective



Une application surjective

Théorème (Applications injectives, surjectives, bijectives) :

Soit E et F deux ensembles de MÊME cardinal et $f : E \rightarrow F$, on a l'équivalence suivante :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Dém. : [9] Il suffit de montrer l'équivalence : $f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$.

$\Rightarrow$: On montre que $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$.

$\Leftarrow$: Par l'absurde, s'il existe $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$ alors f réalise une surjection de $E \setminus \{x\}$ dans F . □

Combien existe-t-il d'applications entre deux ensembles finis ? Voici le théorème.

Théorème (Cardinal de l'ensemble des applications) :

Soit E et F deux ensembles finis, l'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E , on a :

$$\text{card}(F^E) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}$$

Dém. : [10] Si $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, on montre que $\varphi : F^E \rightarrow F^n$ est une bijection. □

$$f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Et combien un ensemble fini possède-t-il de sous-ensembles ? Voici le théorème qui se démontre grâce au précédent.

Théorème (Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , l'ensemble des sous-ensembles de E est noté $\mathcal{P}(E)$, on a :

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Dém. : [11] On montre que $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$ est une bijection. □

$$A \mapsto \mathbb{1}_A$$

2 Listes et combinaisons

2.1 Listes d'un ensemble

Définition (liste) :

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle *p-liste* de E tout p -uplet d'éléments de E , c'est-à-dire tout élément de E^p .

Une p -liste est donc notée : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ où chaque x_i , pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, est un élément de E .

Remarques : Une p -liste étant un p -uplet :

- Ses différents éléments sont ordonnés : deux p -listes comportant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes.
- Elle peut contenir plusieurs fois le même élément.



— Ces deux remarques permettent de savoir si, dans la situation étudiée, on a affaire à une liste. —

Exemples :

- $(5, 1, 3)$, $(3, 1, 5)$ et $(2, 6, 2)$ sont des 3-listes différentes de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- On considère une urne contenant des boules supposées toutes différentes. On effectue dans cette urne, une *succession* de tirages d'une boule *avec remise* (ce qui signifie que l'on remplace la boule tirée dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant).

Dans cette situation, le résultat de ces tirages peut être assimilé à une liste.

- Un nombre compris entre 0 et 9999 peut être assimilé à une 4-liste d'éléments de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$.

Propriété (Dénombrement des p-listes) :

Le nombre de p -listes d'un ensemble E de cardinal n est n^p .

Dém. : [12] D'après la propriété [7], $\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p$. □

Exemple : Combien existe-t-il de nombres à 4 chiffres ne comportant pas de chiffre 0 ?

.....

.....

.....

2.2 Arrangements et permutations d'un ensemble

2.2.1 Arrangements

Définition (arrangement) :

Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle *p-arrangement* de E toute p -liste d'éléments distincts de E .

Remarques : Un p -arrangement étant une p -liste d'éléments distincts :

- Ses différents éléments sont ordonnés.
- Il ne peut pas contenir plusieurs fois le même élément.



Ces deux remarques permettent de savoir si, dans la situation étudiée, on a affaire à un arrangement.

Exemples :

- $(5, 1, 3, 2)$ et $(3, 6, 5, 2)$ sont des 4-arrangements de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- On considère une urne contenant des boules supposées toutes différentes. On effectue dans cette urne, une *succession* de tirages d'une boule *sans remise* (ce qui signifie que l'on ne replace pas la boule tirée dans l'urne entre deux tirages).

Dans cette situation, le résultat de ces tirages peut être assimilé à un arrangement.

Propriété (Dénombrement des p -arrangements) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le nombre de p -arrangements d'un ensemble E de cardinal n est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Dém. : [13] On compte le nombre de façons de choisir chaque élément de l'arrangement. □

Exemples :

- Combien de nombres à 4 chiffres distincts peut-on faire avec les chiffres de l'ensemble $\llbracket 1, 8 \rrbracket$?

.....

.....

- Dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10, on tire successivement et sans remise, 3 boules de l'urne. Quel est le nombre de tirages possibles ?

.....

.....

Propriété (Dénombrement des applications injectives) :

Soit E et F deux ensembles finis, on note $p = \text{card}(E)$, $n = \text{card}(F)$ et on suppose $p \leq n$.
Le nombre d'applications injectives de E dans F est : $\frac{n!}{(n-p)!}$

Dém. : [14] $E = \{x_1, \dots, x_p\}$, f est entièrement déterminée par ses images $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ qui forment un p -arrangement de F . □

2.2.2 Permutations

Définition (*permutation*) :

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *permutation* de E tout n -arrangement de E .

Exemple : $(2, 1, 3, 4)$ et $(4, 2, 3, 1)$ sont des permutations de l'ensemble $\llbracket 1, 4 \rrbracket$

Propriété (Dénombrement des permutations) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n!$

Dém. : [15] Une conséquence du théorème [13]. □

Exemples :

- Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10, on la vide en tirant les boules une à une. Combien existe-t-il de façons de le faire ?
.....
.....

- Combien le mot « POIRES » possède-t-il d'anagrammes ?
.....
.....
.....

2.3 Combinaisons d'un ensemble

Définition (*combinaison*) :

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on appelle *p-combinaison* de E toute partie de E possédant p éléments.

Une combinaison de p éléments (lorsque $p \neq 0$) peut donc être notée comme un sous-ensemble : $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ où chaque x_i , pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, est un élément de E .

L'entier p peut être égal à 0, la partie vide $\emptyset$ est une combinaison à 0 élément de E .

Remarques : Une p -combinaison étant une partie de E :

- Ses différents éléments ne sont pas ordonnés.
- Ses éléments sont tous distincts.



Ces deux remarques permettent de savoir si, dans la situation étudiée, on a affaire à une combinaison.

Exemples :

- $\{1, 6, 4\}$ est une 3-combinaison de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- On considère une urne contenant des boules supposées toutes différentes, à l'intérieur de laquelle, on tire une *poignée* de boules.
Dans cette situation, le résultat de ces tirages peut être assimilé à une combinaison.
- Les différentes « mains » qu'il est possible de distribuer avec un jeu de cartes forment également des combinaisons.

Propriété (Dénombrement des p-combinaisons) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le nombre de p -combinaisons d'un ensemble E de cardinal n est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Dém. : [16] Un p -arrangement est une p -combinaison dont les éléments ont été ordonnés. □

Exemples :

- Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire une poignée de 7 boules. Combien existe-t-il de tirages différents ?

.....

.....

- On lance 3 dés simultanément, combien de résultats différents peut-on avoir si l'on suppose que les dés donnent des chiffres distincts ?

.....

.....

3 Dénombrement

Dans les exercices de dénombrement, on est amené à compter combien il existe certains objets.
Voici deux idées que l'on doit avoir avant d'aborder un tel exercice.

3.1 Reconnaître une situation du cours : listes, arrangements, combinaisons

Pour cela, on se pose deux questions, les objets sont-ils formés d'éléments :

- ordonnés ?
- avec éventuellement des répétitions ?

Les réponses à ses questions détermineront quelle situation utiliser.

3.2 Utiliser un des principes du dénombrement suivants**3.2.1 Principe multiplicatif**

Si pour obtenir les différents objets à dénombrer on utilise plusieurs « *étapes* » (on choisit d'abord ceci..., puis on choisit ceci,...) il suffit alors de compter le nombre de possibilités offertes à chaque étape, puis de **multiplier** tous les résultats trouvés.

Exemple : Combien existe-t-il de nombres à 3 chiffres distincts ?

.....

.....

.....

.....

.....

3.2.2 Principe additif

Si les différents objets à dénombrer se séparent en plusieurs « *catégories* », il suffit de compter les objets de chaque catégorie puis d'**additionner** tous les résultats trouvés.

Exemple : On lance deux dés simultanément, combien de résultats différents peut-on avoir ?

.....

.....

3.2.3 Une remarque pour finir



Pour compter le nombre d'objets vérifiant une certaine propriété, il est possible de compter le nombre d'objets ne vérifiant pas la propriété puis **retrancher** ce résultat au nombre total d'objets.

Exemple : Combien de nombres à 4 chiffres contenant au moins un chiffre 1, peut-on faire avec les chiffres de l'ensemble $\llbracket 1, 6 \rrbracket$?