

Devoir maison 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1

On va prouver quelques propriétés de la différence symétrique.

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on définit la différence symétrique de A et B , notée $A \Delta B$ par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1) Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, calculer $A \Delta E$, $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta \bar{A}$.

2) Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

2a. $A \Delta B = B \Delta A$,

2b. $\overline{A \Delta B} = \bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B}$,

Exercice 2

On considère un ensemble E . À toute partie A de E , on associe sa fonction caractéristique

$$\phi_A : E \rightarrow \{0, 1\} \text{ définie par } \phi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

1) Démontrer que pour tout couple (A, B) de parties de E : $A \subset B \Leftrightarrow \phi_A \leq \phi_B$.

En déduire $A = B \Leftrightarrow \phi_A = \phi_B$.

2) Justifier que $\phi_A^2 = \phi_A$.

3) Montrer que si A et B sont des parties de E , $\phi_{A \cap B} = \phi_A \phi_B$, $\phi_{\bar{A}} = 1 - \phi_A$.

Montrer que si $A \cap B = \emptyset$, $\phi_{A \cup B} = \phi_A + \phi_B$.

4) En déduire, pour des parties quelconques A et B de E , des expressions de $\phi_{A \cup B}$, $\phi_{A \setminus B}$ et $\phi_{A \Delta B}$.

5) À l'aide des fonctions caractéristiques, démontrez les égalités suivantes, A, B et C étant des parties de E :

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.