

Septième devoir surveillé

3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Veuillez rédiger séparément les exercices

- 1 & 2 d'une part,
- 3 & 4 d'autre part.

Premier exercice

Considérons l'équation

$$(E) \quad 4x^3 + x^2 + x - 3 = 0.$$

Q 1. En étudiant la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3,$$

montrer que l'équation (E) n'a qu'une solution réelle, laquelle appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

Q 2. Montrer que si l'équation (E) admet une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ où $p \wedge q = 1$, alors $p|3$ et $q|4$.

Déterminer les rationnels vérifiant ces conditions.

Q 3. Déterminer la solution réelle de l'équation (E). Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} .

Deuxième exercice

[d'après Mines-Ponts]

Considérons un entier n non nul et des réels x_1, \dots, x_n strictement positifs.

Q 4. Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Q 5. Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n.$$

Q 6. Montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Troisième exercice

[d'après Mines-Ponts 2021]

POLYNÔMES À RACINES TOUTES RÉELLES

Notations

- Pour tout $0 \leq k \leq n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$.
- On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ . On dit que a est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

Log-concavité des suites

Soit (a_0, \dots, a_n) une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

- *unimodulaire* s'il existe $0 \leq j \leq n$ tel que

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n;$$

- *log-concave* si pour tout $1 \leq j \leq n-1$, on a

$$a_j^2 \geq a_{j-1} a_{j+1};$$

- *ultra log-concave* si $\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{k=0, \dots, n}$ est log-concave.

Q 7. Montrer que la suite binomiale $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0, \dots, n}$ est log-concave.

Q 8. Montrer que si $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

Q 9. Montrer que si $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbf{R}$.

On suppose dans cette question que P est à racines toutes réelles.

Q 10. Montrer que P' est à racines toutes réelles.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

Q 11. Montrer que $Q(X) = X^n P(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.

Q 12. Pour $1 \leq k \leq n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1} Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0, \dots, n}$ est ultra log-concave.

Quatrième exercice

[d'après Centrale-Supélec 2021]

Objectif

L'objectif de ce problème est l'étude de suites dites *hypergéométriques* et d'en donner quelques exemples en analyse.

Notations

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On note $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial p parmi n , égal à $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leq n$ et égal à 0 sinon.

On note $D = \mathbb{R} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^n , les deux notations $f^{(n)}$ et $\frac{d^n f}{dx^n}$ sont utilisées pour la dérivée n -ième de f .

I Suites hypergéométriques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *hypergéométrique* lorsqu'il existe deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(I.1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}.$$

On dit alors que P et Q sont des polynômes *associés* à la suite hypergéométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q 13. Montrer qu'une suite géométrique est hypergéométrique.

Q 14. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \binom{n}{p}$ est hypergéométrique.

Q 15. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite hypergéométrique de polynômes associés P et Q . On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0) = 0$ et, $\forall n \geq n_0$, $Q(n) \neq 0$. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

II Symbole de Pochhammer

On définit le symbole de Pochhammer, pour tout nombre réel a et tout entier naturel n par

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a(a+1) \cdots (a+n-1) = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 16. Si a est un entier négatif ou nul, justifier que la suite $([a]_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Q 17. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n , $[a]_{n+1} = a[a+1]_n$.

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $[a]_n$ à l'aide de factorielles lorsque $a \in \mathbb{N}^*$.

Considérons trois nombres réels a , b et c .

Q 19. Justifier que, si $c \in D$, alors $\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n}$ est bien défini pour tout entier naturel n .

On suppose cette condition vérifiée dans la question suivante.

Q 20. Montrer que la suite $\left(\frac{[a]_n [b]_n}{[c]_n n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique et préciser des polynômes associés.

III Les polynômes de Laguerre

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout nombre réel x ,

$$\Phi_n(x) = e^{-x} x^n \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x).$$

Q 21. Déterminer L_0 , L_1 , L_2 et L_3 .

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

Q 22. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n . Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k.$$

Q 23. Pour tout nombre réel x , exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L'_n(x)$.

Q 24. Utiliser l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1} x \Phi_n(x)}{dx^{n+1}},$$

que l'on justifiera, pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L'_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x .

Q 25. Utiliser l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{d^{n+1} \Phi_{n+1}^{(1)}(x)}{dx^{n+1}}$$

pour démontrer l'égalité

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x .

Q 26. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle

$$(III.1) \quad x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0.$$