

Corrigé du septième devoir surveillé

Premier exercice

Q 1. Le but de la question est de montrer que, dans un premier temps, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} , et dans un deuxième temps, que cette unique solution est dans $]0, 1[$.

f est polynomiale, donc elle est continue et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 12x^2 + 2x + 1.$$

Le discriminant de $12x^2 + 2x + 1$ vaut $\Delta = -4 \cdot 11 < 0$, donc f' est strictement positive sur \mathbb{R} .

f est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} , elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur

$$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[.$$

En effet, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = 4x^3 \left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{4x^3} \right).$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{4x^3} \right) = 1,$$

donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Par ailleurs, $f(0) = -3$ et $f(1) = 3$, donc $\alpha \in]0, 1[$.

Ainsi, l'équation (E) n'a qu'une solution réelle qui, de plus, appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

Q 2. On veut utiliser les théorèmes d'arithmétique dans les entiers ($p|3, q|4$); on se ramène donc à des égalités entre entiers.

Soient p et q premiers entre eux. On suppose que $\frac{p}{q}$ est

une solution de (E). Alors, en multipliant par q^3 , on obtient : $4p^3 + p^2q + pq^2 - 3q^3 = 0$.

Ainsi, $p(4p^2 + pq + q^2) = 3q^3$. Donc p divise $3q^3$. Comme $p \wedge q = 1, p \wedge q^3 = 1$ (p et q n'ont aucun facteur premier en commun). Par le théorème de Gauss, on en déduit que p divise 3.

De même, $q(3q^2 - pq - p^2) = 4p^3$. Donc q divise $4p^3$. Comme $p \wedge q = 1, q \wedge p^3 = 1$ (p et q n'ont aucun facteur premier en commun). Par le théorème de Gauss, on en déduit que q divise 4.

On a bien montré que si $\frac{p}{q}$, rationnel écrit sous forme irréductible, est solution de (E), alors p divise 3 et q divise 4.

Ainsi, $\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4} \right\}$.

Q 3. L'intersection de cet ensemble avec $]0, 1[$ est $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$.

On utilise le schéma de Horner avec $\alpha = \frac{3}{4}$.

	4	1	1	-3
α		3	3	3
	4	4	4	0

Ainsi,

$$\begin{aligned} \underline{f(x)} &= \left(x - \frac{3}{4} \right) (4x^2 + 4x + 4) \\ &= 4 \left(x - \frac{3}{4} \right) (x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut $\Delta = -3$. Donc les racines de $x^2 + x + 1 = 0$ sont $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, les solutions de (E) dans \mathbb{C} sont

$$\frac{3}{4}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Deuxième exercice

Q 4. La fonction \ln est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x > 0, \ln'(x) = 1/x$ et $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$. Donc \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* .

Grâce à l'inégalité de Jensen appliquée aux réels strictement positifs x_1, \dots, x_n , sachant que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ et que $\frac{1}{n} \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right),$$

ou encore, avec les propriétés de \ln ,

$$\ln \left(\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right).$$

Puisque \ln est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , on en tire que

$$\left[\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right]$$

Commentaires.

On pouvait aussi invoquer l'exponentielle, elle-même strictement croissante.

Cette inégalité dit que la moyenne arithmétique des x_k est supérieure à leur moyenne géométrique.

Q 5. En appliquant cette inégalité aux réels strictement positifs $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$,

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k},$$

ou encore

$$\frac{1}{\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k},$$

c'est-à-dire

$$\left[\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n \right]$$

Q 6. Posons $y_k = \frac{x_{k+1}}{x_k}$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $y_n = \frac{x_1}{x_n}$, de sorte que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k}.$$

Constatons que

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n y_k &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} y_k \right) \cdot y_n \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{x_{k+1}}{x_k} \right) \cdot \frac{x_1}{x_n} = \frac{x_n}{x_1} \frac{x_1}{x_n} = 1, \end{aligned}$$

où l'on a reconnu un produit télescopique. Alors, en appliquant la question Q5 aux réels strictement positifs y_1, \dots, y_n ,

$$\left(\prod_{k=1}^n y_k \right)^{1/n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k} \right) \geq n,$$

ce qui donne

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Troisième exercice

Q 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $u_k = \binom{n}{k}$. Constatons que $u_k \neq 0$. Alors, si $k < n$,

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{u_k} &= \binom{n}{k+1} \Big/ \binom{n}{k} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \Big/ \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n-k}{k+1}. \end{aligned}$$

Si k augmente, $n-k$ diminue et $k+1$ augmente, donc $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ diminue. Ainsi, pour $k > 0$,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{u_k}{u_{k-1}},$$

c'est-à-dire, sachant que $u_k > 0$,

$$u_{k+1} u_{k-1} \leq u_k^2.$$

Ainsi, la suite binomiale est log-concave.

Q 8. Considérons une suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ ultra log-concave. Alors pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, en reprenant la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ précédente,

$$\frac{a_{k+1}}{u_{k+1}} \frac{a_{k-1}}{u_{k-1}} \leq \left(\frac{a_k}{u_k} \right)^2.$$

Alors, sachant que $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ est log-concave,

$$a_{k+1} a_{k-1} \leq a_k^2 \underbrace{\frac{u_{k+1} u_{k-1}}{u_k^2}}_{\leq 1} \leq a_k^2.$$

Ainsi, toute suite ultra log-concave est log-concave.

Q 9. Considérons une suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ strictement positive et log-concave. Alors pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{a_k}{a_{k-1}},$$

et la suite $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right)_{0 \leq k \leq n-1}$ décroît. Trois cas se présentent.

Premier cas. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, autrement dit, $a_{k+1} \geq a_k$: la suite est unimodulaire.

Deuxième cas. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1$, d'où $a_{k+1} \leq a_k$: la suite est unimodulaire.

Troisième cas. Il existe $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\frac{a_{j+1}}{a_j} = 1$. Alors, puisque la suite $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right)_{0 \leq k \leq n-1}$ décroît, pour tout $k \leq j$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, et $a_{k+1} \geq a_k$; pour tout $k \geq j$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1$, et $a_{k+1} \leq a_k$. Ainsi,

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n$$

et la suite est unimodulaire.

Toute suite log-concave strictement positive est donc unimodulaire.

Q 10. Si $\deg(P) = 0$, $P' = 0$ et bien-sûr, P' est à racines toutes réelles.

Si $\deg(P) = 1$, P' est constante et non nulle. Donc P' ne s'annule pas. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'implication $P'(z) = 0 \implies z \in \mathbb{R}$ est vraie, puisque l'affirmation $P'(z) = 0$ est fautive. Ainsi, P' est à racines toutes réelles.

Soit P de degré supérieur ou égal à 2, à racines toutes réelles. Considérons ses racines distinctes, rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p,$$

chacune de multiplicité m_1, m_2, \dots, m_p . Comme P est scindé sur \mathbb{R} , puisque ses racines sont toutes réelles, on a

$$\sum_{k=1}^p m_k = \deg(P) = n.$$

D'une part, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, P est continue sur $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, dérivable sur $] \lambda_k, \lambda_{k+1} [$ et $P(\lambda_k) = P(\lambda_{k+1}) = 0$. Donc le théorème de Rolle s'applique : il existe $]\lambda_k, \lambda_{k+1} [$ tel que $P'(\mu_k) = 0$. Ici, nous obtenons $p-1$ racines distinctes de P' , toutes au moins simples.

D'autre part, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, λ_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$. Si $m_k > 1$, c'est bien le cas. Et si $m_k = 1$, $m_k - 1 = 0$ et λ_k n'est effectivement pas racine de P' . Ici, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^p (m_k - 1) = \sum_{k=1}^p m_k - \sum_{k=1}^p 1 = n - p$$

racines de P' .

Alors, P' admet déjà au moins

$$(p-1) + (n-p) = n-1 = \deg(P')$$

racines. Mais P' ne peut avoir plus de racines que son degré, donc ce sont ses seules racines.

Finalement, P' est à racines toutes réelles.

Q 11. Comme P est scindé sur \mathbb{R} , il se factorise en

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k},$$

avec les notations de la question précédente. En outre,

$$\sum_{k=1}^p m_k = n,$$

donc on peut écrire

$$X^n = \prod_{k=1}^p X^{m_k}.$$

Alors

$$\begin{aligned} Q(X) &= X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= a_n \left(\prod_{k=1}^p X^{m_k} \right) \left(\prod_{k=1}^p \left(\frac{1}{X} - \lambda_k \right)^{m_k} \right) \\ &= a_n \prod_{k=1}^p \left(X^{m_k} \left(\frac{1}{X} - \lambda_k \right)^{m_k} \right) \\ &= a_n \prod_{k=1}^p (1 - \lambda_k X)^{m_k}. \end{aligned}$$

Où l'on voit que Q est scindé sur \mathbb{R} , donc

Q est à racines toutes réelles.

BONUS. Cette approche permet d'éviter de donner le degré de Q . Mais le voici néanmoins.

Si 0 n'est pas racine de P , $\deg(Q) = \deg(P) = n$.

Sinon, il existe $j \in [1, p]$ tel que $\lambda_j = 0$. Alors

$$Q(X) = a_n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p (1 - \lambda_k X)^{m_k},$$

et

$$\deg(Q) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p m_k = \sum_{k=1}^p m_k - m_j = n - m_j.$$

Q 12. Soit $k \in [1, n-1]$. On a

$$\begin{aligned} Q_1(X) &= P^{(k-1)}(X) = \sum_{i=0}^n a_i (X^i)^{(k-1)} \\ &= \sum_{i=k-1}^n a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{i-k+1}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} Q_2(X) &= X^{n-k+1} \sum_{i=k-1}^n a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{-i+k-1} \\ &= \sum_{i=k-1}^n a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{n-i}, \end{aligned}$$

et enfin, en reprenant les notations de la question Q7,

$$\begin{aligned} Q(X) &= Q_2^{(n-k-1)}(X) \\ &= \sum_{i=k-1}^n a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} (X^{n-i})^{(n-k-1)} \\ &= \sum_{i=k-1}^{k+1} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} \frac{(n-i)!}{(k+1-i)!} X^{k+1-i} \\ &= n! \sum_{i=k-1}^{k+1} \frac{a_i}{\binom{n}{i}} \frac{X^{k+1-i}}{(i-k+1)!(k+1-i)!} \\ &= n! \left(\frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{X^2}{0!2!} + \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \frac{X}{1!1!} + \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \frac{1}{2!0!} \right) \\ &= n! \left(\frac{a_{k-1}}{2u_{k-1}} X^2 + \frac{a_k}{u_k} X + \frac{a_{k+1}}{2u_{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Bien-sûr, $\lfloor \deg(Q) \rfloor \leq 2$.

De plus, comme P est à racines toutes réelles, Q_1 l'est, grâce à la question Q10 suivie d'une récurrence simple. Alors Q_2 l'est aussi, grâce à la question Q11. Et enfin, Q l'est encore, toujours avec la question Q10.

Si $a_{k-1} = 0$, on a bien

$$\left(\frac{a_k}{u_k} \right)^2 \geq \frac{a_{k-1}}{u_{k-1}} \frac{a_{k+1}}{u_{k+1}}.$$

Si $a_{k-1} \neq 0$, Q est un trinôme du second degré à racines toutes réelles, donc son discriminant est positif ou nul, ce qui donne

$$\left(\frac{a_k}{u_k} \right)^2 - 4 \left(\frac{a_{k-1}}{2u_{k-1}} \right) \left(\frac{a_{k+1}}{2u_{k+1}} \right) \geq 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{a_k}{u_k} \right)^2 \geq \frac{a_{k-1}}{u_{k-1}} \frac{a_{k+1}}{u_{k+1}}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{a_k}{u_k} \right)$ est log-concave, c'est-à-dire que

la suite (a_k) est ultra log-concave.

Quatrième exercice

CONVENTION. Convenons que si un produit est vide, c'est-à-dire si l'ensemble de ses indices est vide, on lui attribue la valeur 1. Avec cette convention, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k).$$

En effet, c'est la définition quand $n \geq 1$, et

$$[a]_0 = \prod_{k=0}^{-1} (a+k) = 1$$

avec la convention d'écriture proposée.

Q 13. Soit une suite géométrique (u_n) de raison a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n$. Cette relation s'écrit bien $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ en posant, par exemple,

- $P(n) = a$ et $Q(n) = 1$ quand $a \neq 0$;
- $P(n) = Q(n) = n$ quand $a = 0$ et $u_0 \neq 0$,
- et $P(n) = Q(n) = 1$ quand $a = u_0 = 0$.

Ces acrobaties sont liées au fait que l'on veut que ni P ni Q ne soient le polynôme nul. Alors,

toute suite géométrique est hypergéométrique.

Q 14. Soient n et p dans \mathbb{N} .

Si $n \geq p$, bien-sûr $n+1 \geq p$ et

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{p!(n+1-p)(n-p)!} = \frac{n+1}{n+1-p} u_n. \end{aligned}$$

On a bien $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ en posant

$$\boxed{P(n) = n+1 \text{ et } Q(n) = n+1-p,}$$

où ni P ni Q n'est le polynôme nul.

Avec ce choix, pour $n = p-1$, $P(p-1)u_{p-1} = p \cdot 0 = 0$ et $Q(p-1)u_p = 0 \cdot 1 = 0$, donc $P(p-1)u_{p-1} = Q(p-1)u_p$.

Enfin, pour tout $n \leq p-2$, $n+1 \leq p-1$ donc $u_n = 0$, donc on a bien $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$.

Ainsi, $P(n)u_n = Q(n)u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

la suite $\left(\binom{n}{p} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique.

Q 15. Prouvons par récurrence que pour tout $n \geq n_0 + 1$, $u_n = 0$.

Initialisation. On a $Q(n_0+1)u_{n_0+1} = P(n_0)u_{n_0} = 0$ car $P(n_0) = 0$. Comme $Q(n_0+1) \neq 0$, $u_{n_0+1} = 0$.

Transmission. Supposons que pour un $n \geq n_0 + 1$, $u_n = 0$. Alors $Q(n)u_{n+1} = P(n)u_n = 0$. Mais $n \geq n_0$ donc $Q(n) \neq 0$, alors $u_{n+1} = 0$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq n_0 + 1$, $u_n = 0$.

Ainsi, la suite hypergéométrique est bien nulle à partir d'un certain rang.

Q 16. Si $a \in -\mathbb{N}$, $n = -a + 1 \in \mathbb{N}^*$ et

$$[a]_n = a(a+1) \cdots (a+(-a+1)-1) = 0.$$

De plus, pour tout entier $p \geq n+1$,

$$[a]_p = \prod_{k=0}^{p-1} (a+k) = [a]_n \prod_{k=n}^{p-1} (a+k) = 0.$$

Si a est un entier négatif ou nul, la suite $([a]_n)$ est nulle à partir du rang $-a+1$.

Q 17. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lfloor [a]_{n+1} \rfloor &= \prod_{k=0}^n (a+k) = a \prod_{k=1}^n (a+k) \\ &= a \prod_{k=0}^{n-1} (a+1+k) = \underline{a[a+1]_n}. \end{aligned}$$

Q 18. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \lfloor [a]_n \rfloor &= \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = \prod_{k=a}^{a+n-1} k \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{a+n-1} k}{\prod_{k=1}^{a-1} k} = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}. \end{aligned}$$

Commentaire. On a utilisé la convention du début : pour $a = 1$, $\prod_{k=1}^{a-1} k = 1 = (a-1)!$

Q 19. À la question Q16, on a vu que si $c \in -\mathbb{N}$, la suite $([c]_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. À l'inverse, si $c \in D$, $c \notin -\mathbb{N}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c+k \neq 0$ donc la suite $([c]_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule jamais.

Ainsi, le quotient proposé est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la convention du début, on peut écrire

$$[a]_{n+1} = \prod_{k=0}^n (a+k) = (a+n) \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = (a+n)[a]_n.$$

Alors

$$\frac{[a]_{n+1}[b]_{n+1}}{[c]_{n+1}(n+1)!} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!},$$

ou encore

$$(a+n)(b+n) \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!} = (c+n)(n+1) \frac{[a]_{n+1}[b]_{n+1}}{[c]_{n+1}(n+1)!}.$$

La suite $\left((a+n)(b+n) \frac{[a]_n[b]_n}{[c]_n n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est hypergéométrique, avec par exemple $P(n) = (a+n)(b+n)$, $Q(n) = (c+n)(n+1)$.

Q 21. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'abord,

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= e^{-x}, & \Phi_1(x) &= e^{-x} x, \\ \Phi_2(x) &= e^{-x} x^2, & \Phi_3(x) &= e^{-x} x^3. \end{aligned}$$

Dérivons, avec la formule de Leibniz bien-sûr :

$$\begin{aligned} \lfloor L_0(x) \rfloor &= \frac{e^x}{0!} \Phi_0(x) = e^x e^{-x} = \underline{1}, \\ \lfloor L_1(x) \rfloor &= \frac{e^x}{1!} \Phi_1'(x) = e^x e^{-x} (1-x) = \underline{1-x}, \\ \lfloor L_2(x) \rfloor &= \frac{e^x}{2!} \Phi_2''(x) = \frac{e^x}{2} e^{-x} (2-2 \cdot 2x+x^2) \\ &= \underline{1-2x+\frac{x^2}{2}}, \\ \lfloor L_3(x) \rfloor &= \frac{e^x}{3!} \Phi_3'''(x) \\ &= \frac{e^x}{6} e^{-x} (6-3 \cdot 6x+3 \cdot 3x^2-x^3) \\ &= \underline{1-3x+3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}. \end{aligned}$$

Q 22. Toujours avec la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sachant que pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\frac{d^p x^n}{dx^p} = n(n-1) \cdots (n-p+1) x^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p},$$

on a

$$\begin{aligned} \lfloor L_n(x) \rfloor &= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \\ &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k e^{-x}}{dx^k} \frac{d^{n-k} x^n}{dx^{n-k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Où l'on voit bien que $\lfloor L_n \rfloor$ est de degré n .

Q 23. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor \Phi_n^{(n)}(x) \rfloor = n! e^{-x} L_n(x).$$

Et en dérivant,

$$\lfloor \Phi_n^{(n+1)}(x) \rfloor = n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x)).$$

Q 24. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor \Phi_{n+1}(x) \rfloor = e^{-x} x^{n+1} = x e^{-x} x^n = x \Phi_n(x).$$

Alors, avec la formule de Leibniz et sachant que les dérivées de x d'ordre supérieur ou égal à 2 sont nulles,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{d^{n+1} x \Phi_n(x)}{dx^{n+1}} \\ &= x \Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1) \cdot 1 \cdot \Phi_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Avec la question Q23, on en tire que

$$\begin{aligned} (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x) \\ = x n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1) n! e^{-x} L_n(x), \end{aligned}$$

et en simplifiant par $(n+1)! e^{-x}$ qui ne s'annule pas,

$$\lfloor L_{n+1}(x) \rfloor = \left(1 - \frac{x}{n+1} \right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L_n'(x).$$

Q 25. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (\Phi_{n+1}^{(n+1)})'(x).$$

D'une part, avec la question Q23,

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (n+1)! e^{-x} (L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}'(x) &= e^{-x} ((n+1)x^n - x^{n+1}) \\ &= (n+1)\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x), \end{aligned}$$

donc, toujours avec la question Q23,

$$\begin{aligned} (\Phi_{n+1}^{(n+1)})'(x) &= (n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= (n+1)(n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x))) \\ &\quad - (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x) \\ &= (n+1)! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Alors, en simplifiant par $(n+1)! e^{-x}$ qui ne s'annule toujours pas,

$$L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x) = L_n'(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x),$$

c'est-à-dire

$$\lfloor L_{n+1}'(x) \rfloor = \lfloor L_n'(x) - L_n(x) \rfloor.$$

Q 26. En dérivant l'expression de la question Q24, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_{n+1}'(x) &= -\frac{1}{n+1} L_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1} \right) L_n'(x) \\ &\quad + \frac{1}{n+1} L_n'(x) + \frac{x}{n+1} L_n''(x). \end{aligned}$$

Avec la question Q25 et en passant tout dans le même membre,

$$\frac{x}{n+1} L_n''(x) + \frac{1-x}{n+1} L_n'(x) + \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) L_n(x) = 0,$$

d'où

$$\text{(III.1)} \quad \lfloor x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) \rfloor = 0.$$