

Devoir surveillé 8

Les calculatrices sont interdites.

La rédaction doit être soignée ; les résultats doivent être mis en valeur. Les questions seront numérotées comme sur l'énoncé. La présentation sera notée.

Exercice 1

On considère la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^2 + 5X - 2}{X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X} \in \mathbb{R}(X).$$

- Q1)** Décomposer le polynôme $B = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- Q2)** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle F dans $\mathbb{R}(X)$.
- Q3)** Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3, on pose :

$$S_N = \sum_{n=3}^N \frac{n^2 + 5n - 2}{n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n}.$$

Q3a. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, S_N = \frac{5}{3} + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N-1}.$$

Q3b. La suite $(S_N)_{N \geq 3}$ est-elle convergente ? Préciser la limite le cas échéant.

Exercice 2

On pose $F = \frac{X^2 + 2}{X(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)}.$

- Q1)** Donner la forme a priori de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}$.
- Q2)** En utilisant la parité de la fraction, déterminer des relations entre les coefficients.
- Q3)** En déduire la décomposition en éléments simples de F .
- Q4)** Déterminer une primitive g de $\tilde{F}$ sur $]1, +\infty[$.

Problème 3

Les deux dernières parties en sont indépendants, mais utilisent toutes les deux les calculs de la première partie.

Pour deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ne s'annulant pas, on note $u_n \sim v_n$ lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Partie I. Intégrales de Wallis.

On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale de Wallis W_n par $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

Q1) Calculer les valeurs de W_0 , W_1 et W_2 .

Q2) Démontrer que $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.

Q3) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

Q4) Montrer par récurrence que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q5) Déterminer la monotonie de la suite $(W_n)_n$, en déduire sa convergence.

Q6) Déterminer la limite de $\frac{W_n}{W_{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Q7) En déduire la formule de Wallis : $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

Partie II. Calcul d'une somme bien connue

Dans cette deuxième partie, on va démontrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour cela, on note $u_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt$.

Q8) Montrer que, $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$.

Q9) En déduire que $0 \leq u_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_{2n} - W_{2n+2})$.

Q10) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{W_{2n}} = 0$.

Q11) Montrer que $W_{2n+2} = (2n+2) \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t) dt$.

Q12) En déduire que $\frac{W_{2n+1}}{n+1} = (2n+1)u_n - (2n+2)u_{n+1}$.

Q13) En déduire que $2 \left(\frac{u_n}{W_{2n}} - \frac{u_{n+1}}{W_{2n+2}} \right) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Q14) Démontrer enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie III. La formule de Stirling

On note dans cette partie $a_n = \left(\frac{e}{n} \right)^n \frac{n!}{\sqrt{n}}$.

Q15) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+\frac{1}{2}}$. En déduire que f est minorée par e sur $[1, +\infty[$.

Q16) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante et en déduire sa convergence. On notera désormais ℓ sa limite.

Q17) On note g_k la fonction affine vérifiant $g_k(k) = \ln(k)$ et $g_k(k+1) = \ln(k+1)$. Montrer que

$$\forall t \in [k, k+1], 0 \leq \ln(t) - g_k(t) \leq (t-k) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Q18) En déduire que $0 \leq \int_1^n \ln(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k+1) + \ln(k)}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Q19) En déduire que $\ln \left(\frac{n}{e} \right)^n - \ln(n!) + \ln \sqrt{n} \leq \frac{-1}{2}$.

Q20) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est minorée par $\sqrt{e}$.

Q21) En déduire que la limite ℓ de la suite $(a_n)_n$ ne peut pas être nulle.

Q22) Déterminer la valeur de ℓ à l'aide de la formule de Wallis, et conclure que la formule de Stirling est vérifiée : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$.